NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

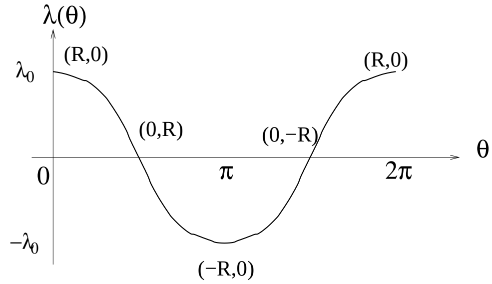
Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

# LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
# FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Mandag 4. desember 2006 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

**OPPGAVE 1**

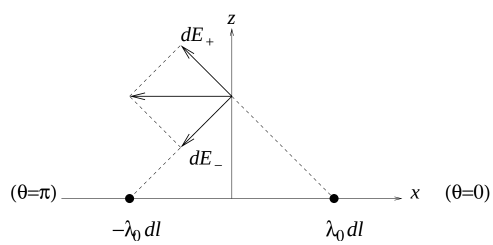
$a$) Ladningstettheten $\lambda(\theta)$ varierer rundt ringen som vist i følgende figur:




Det er vel opplagt fra figuren at ringen er like mye negativt ladet i venstre halvplan ($x < 0$) som den er positivt ladet i høyre halvplan, slik at total ladning på ringen må bli $\underline{Q = 0}$.
Dette får vi selvsagt også ved å bestemme $Q$ eksplisitt:

$$Q = \oint \lambda \, dl = \oint \lambda(\theta) R \, d\theta = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

Deretter skal vi argumentere for at $\boldsymbol{E}(0, 0, z) = -E_x(z)\,\hat{x}$, dvs at det elektriske feltet fra ringen på $z$-aksen peker i negativ $x$-retning.
La oss først se på $xz$-planet:



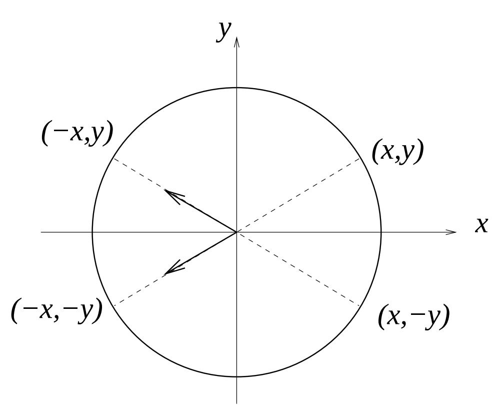

Vi ser at summen av bidragene til feltet fra de to ladningselementene

$$dq(0) = \lambda_0 \, dl$$

på positiv $x$-akse og

$$dq(\pi) = -\lambda_0 \, dl$$

på negativ $x$-akse blir en vektor i negativ $x$-retning.
Videre kan vi se på bidraget fra 4 ladningselementer i posisjoner $(x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, y)$ og $(-x, -y)$:



I venstre halvplan er ladningen negativ. Feltbidragene på $z$-aksen fra elementene i $(-x, y)$ og $(-x, -y)$ blir derfor vektorer med retning *inn mot* ladningselementene. I høyre halvplan er ladningen positiv. Da blir feltbidragene på $z$-aksen fra elementene i $(x, y)$ og $(x, -y)$ vektorer med retning *bort fra* ladningselementene. I figuren vises bare projeksjonen i $xy$-planet, som blir like stor for diagonalt motsatte elementer. Med andre ord, $z$-komponenten av feltet må forsvinne. Videre ser vi at de to elementene i $(x, y)$ og $(-x, -y)$ gir $y$-komponenter som er like store men motsatt rettet de tilsvarende fra elementene i $(x, -y)$ og $(-x, y)$. Altså må også $y$-komponenten forsvinne.
Samtlige ladningselementer bidrar med negativ $x$-komponent, så alt i alt blir feltet på $z$-aksen rettet langs $-\hat{x}$.
(Under forutsetning av at konstanten $\lambda_0$ er positiv. Med negativ $\lambda_0$ skifter selvsagt alle feltvektorer retning, slik at det totale feltet peker i positiv $x$-retning.)

*b*) Avstanden fra $z$-aksen til alle punktene på ringen er like stor:

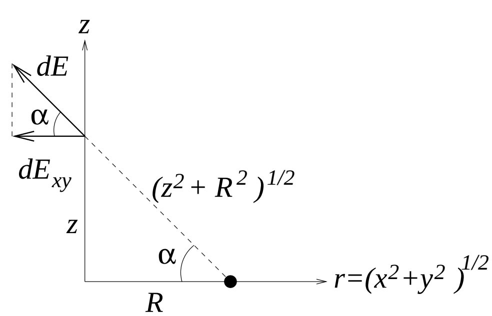
$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

*Absoluttverdien* av bidraget til det elektriske feltet fra en "buebit" $dl = R\ d\theta$ avhenger av vinkelen $\theta$ (som opplyst i oppgaveteksten):

$$dE(\theta) = dE = \frac{|\lambda(\theta)|\ dl}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2 + R^2)} = \frac{\lambda_0|\cos\theta|R\ d\theta}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2 + R^2)}$$

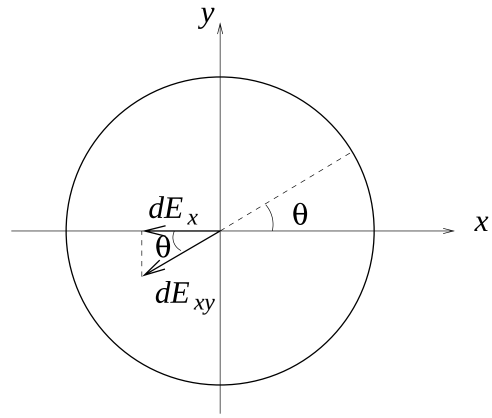
Ettersom $\cos\theta$ er negativ for $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, har vi satt på absoluttverditegn for å få absoluttverdien av $d\boldsymbol{E}$. I punkt *a*) overbeviste vi oss om at alle elementer av ringen bidrar med *negativ* $x$-komponent til feltet, dvs med *samme* fortegn. Vi må derfor bare passe på at den størrelsen som til slutt skal integreres opp ikke skifter fortegn når $\theta$ går mellom 0 og $2\pi$.
Projeksjonen av $dE$ ned i $xy$-planet (dvs komponenten av $d\boldsymbol{E}$ i $xy$-planet) blir:

$$(dE)_{xy} = dE\cos\alpha = dE\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$




Dernest trenger vi projeksjonen av $(dE)_{xy}$ ned på $x$-aksen (som altså blir (den negative) $x$-komponenten av $d\boldsymbol{E}$):

$$dE_x = (dE)_{xy}|\cos\theta|$$




Da har vi fått et uttrykk for $dE_x$ som er en funksjon av vinkelen $\theta$:

$$
\begin{aligned}
dE_x &= (dE)_{xy}|\cos\theta| \\
&= dE\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}|\cos\theta| \\
&= \frac{\lambda_0|\cos\theta|R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}|\cos\theta| \\
&= \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\cos^2\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

Her kunne vi trygt sløyfe absoluttverditegn fordi $\cos^2\theta$ alltid er positiv.
Total $x$-komponent av feltet på $z$-aksen, og dermed totalt felt på $z$-aksen blir:

$$
\begin{aligned}
E_x(z) &= \int dE_x = \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \\
&= \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\cdot\pi \\
&= \underline{\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}}
\end{aligned}
$$

$c$) Hvis $z \gg R$, kan vi sette $z^2+R^2 \simeq z^2$. Det elektriske feltet blir da tilnærmet lik

$$
E_x(z) \simeq \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 z^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 z^3}
$$

der vi har satt inn det oppgitte uttrykket for ringens dipolmoment, $p = \pi\lambda_0 R^2$.
Feltet faller altså av som en over avstanden opphøyd i tredje ($\underline{n=3}$), et resultat som vi har vært borte i både på regneøving og på forelesning. Hadde ringen hatt en netto ladning forskjellig fra null, måtte vi i stor avstand ha fått et felt proporsjonalt med $1/z^2$, ettersom det da essensielt hadde sett ut som en punktladning. Feltet fra en dipol, med null netto ladning, må opplagt falle av *raskere* enn feltet fra en punktladning, ettersom vektorbidraget fra den negative og den

positive halvdelen av dipolen delvis kansellerer hverandre: Den negative halvdelen bidrar med et felt rettet *inn mot* ringen, den positive halvdelen bidrar med et felt rettet *bort fra* ringen. Dermed, og uten detaljert kjennskap til $E_x(z)$, må en kunne konkludere med at $n > 2$.
En annen sak er at ren *dimensjonsanalyse* av det oppgitte uttrykket for $E_x(z)$ gir direkte hva $n$ må være: Elektrisk dipolmoment $p$ har, fra sin definisjon, enheten Cm (ladning $\times$ lengde). Elektrisk felt skal være på formen "ladning/$\varepsilon_0 \times$ lengde$^2$". Følgelig må $n = 3$.

## OPPGAVE 2

*a*) I en tynn ring med radius $r$ og tykkelse $dr$ går det en strøm $dI = dq/T$, der $T = 2\pi/\omega$ er tiden skiva bruker på en omdreining (dvs perioden) og $dq = \sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$ er ladningen på den tynne ringen. En slik tynn ring omslutter et areal $\pi r^2$, slik at dens magnetiske dipolmoment er

$$dm = dI \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr$$

Skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$m = \int dm = \int_a^b \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr = \frac{1}{2} \sigma_0 \omega b^2 \pi (b^2 - a^2)$$

*b*) Vi kan bruke det oppgitte uttrykket til å skrive ned magnetfeltet $dB$ fra en tynn ring med radius $r$, tykkelse $dr$ og strøm $dI = dq/T = \sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \omega/2\pi$:

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Innsetting for $dI$ og integrasjon over skiva gir

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2}{2} \int_a^b \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Dette er et enkelt integral, og vi får

$$\int_a^b \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \left(z^2 + a^2\right)^{-1/2} - \left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}$$

Altså

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 b^2}{2} \left[ \left(z^2 + a^2\right)^{-1/2} - \left(z^2 + b^2\right)^{-1/2} \right]$$

## OPPGAVE 3

*a*) Magnetisk fluks gjennom ringen:

$$\phi(t) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = B \cdot \pi r^2 \cdot \cos \omega t$$

Figuren i oppgaveteksten viser at ringens flatenormal, og dermed $\boldsymbol{A}$, er parallell med $\boldsymbol{B}$ ved tidspunktet $t = 0$. Valget $\cos\omega t$ er konsistent med dette.
Indusert spenning i ringen blir dermed, i følge Faradays induksjonslov:

$$V(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \omega B\pi r^2 \sin\omega t$$

Spenningsamplituden er altså

$$V_0 = \omega B\pi r^2$$

Ohms lov gir

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{\omega B\pi r^2}{R} \sin\omega t$$

$b$) En leder med konduktivitet $\sigma$, lengde $l$ og tverrsnitt $S$ har resistans

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

(Utledes eventuelt fra sammenhengen $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ mellom strømtetthet og elektrisk felt, som gir $I = j \cdot A = \sigma EA = \sigma(V/l)A = V/R$)
Her er lengden lik ringens omkrets, $l = 2\pi r$, og tverrsnittet er $S = \pi a^2$, slik at

$$R = \frac{2\pi r}{\sigma \cdot \pi a^2} = \frac{2r}{\sigma a^2}$$

Kirchhoffs spenningsregel for kretsen med $R$ og $L$ i serie gir

$$V - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

dvs

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L}\sin\omega t$$

Vi ser da at

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

og

$$\alpha_0 = \frac{V_0}{L} = \frac{\omega B\pi r^2}{L}$$

Kommentar:
Legg merke til at det her er snakk om både gjensidig induksjon og selvinduksjon: Det uniforme magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ er skapt av elektrisk strøm i en "annen" krets. I praksis kunne ringen for eksempel ha befunnet seg i rommet mellom nordpolen av en spole og sørpolen av en annen spole. På grunn av at ringen roterer, blir den magnetiske fluksen fra disse spolene ("krets 1") gjennom ringen ("krets 2") tidsavhengig, og det induseres en elektromotorisk spenning i ringen – altså gjensidig induksjon. Denne effekten er representert ved "spenningskilden" $V(t)$ i $RL$–kretsen i oppgaven.
Spenningskilden $V(t)$ fører til en tidsavhengig strøm $I(t)$ i ringen. Denne strømmen vil dermed også resultere i en tidsavhengig magnetisk fluks gjennom ringen, slik at det induseres en mot-spenning i ringen – altså selvinduksjon. Denne effekten er representert ved selvinduktansen

$L$ i $RL$–kretsen, og ved leddet $-L\,dI/dt$ i ligningen som vi fikk ved å bruke Kirchhoffs spenningsregel.
Den videre *analyse* av slike vekselstrømkretser (dvs: å løse resulterende differensialligninger og bestemme resulterende strømmer) vil være tema i senere kurs, eksempelvis FY1013 Elektrisitet og magnetisme II og TFY4185 Måleteknikk.

## OPPGAVE 4

$a$) Parallellkobling av $n$ like store motstander $R$ gir tilsammen en motstand $R/n$. Total motstand i kretsen er derfor

$$R + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{11R}{6}$$

slik at strømmen blir

$$I = \frac{6V_0}{11R}$$

ved bruk av Ohms lov. Med oppgitte tallverdier: $I \simeq 55$ mA.
Effekt, dvs energi pr tidsenhet, levert av spenningskilden:

$$P = V_0 I = \frac{6V_0^2}{11R} \simeq 0.55 \text{ W}$$

Energi levert av spenningskilden i løpet av 10 s:

$$U = Pt \simeq 5.5 \text{ J}$$

$b$) Tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ gir konstant strøm

$$I_1 = \frac{V_0}{R}$$

gjennom motstanden til venstre. Tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ til seriekoblingen av $C$ og $R$ har vi tatt i detalj på forelesning. Kondensatoren lades opp slik:

$$Q(t) = V_0 C \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

slik at strømmen i denne "grenen" av kretsen blir

$$I_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC}$$

Dermed blir total strøm levert av spenningskilden

$$I(t) = I_1 + I_2(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 + e^{-t/RC}\right)$$

Effekt levert av spenningskilden:

$$P(t) = V_0 I(t) = \frac{V_0^2}{R} \left(1 + e^{-t/RC}\right)$$

Energi levert av spenningskilden mellom $t = 0$ og $t = T$:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T P(t)dt \\ &= \frac{V_0^2}{R}\Big|_0^T \left(t - RCe^{-t/RC}\right) \\ &= \frac{V_0^2}{R}\left(T - RCe^{-T/RC} + RC\right) \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier ($T = 10$ s):

$$U \simeq 11 \text{ J}$$

$c$) Strøm gjennom motstanden:

$$I_1 = \frac{V_0}{R}$$

Strøm gjennom induktansen bestemmes av

$$V_0 = L\frac{dI_2}{dt}$$

som gir

$$I_2(t) = \frac{V_0 t}{L}$$

ettersom det ikke gikk noen strøm før $t = 0$. Total strøm:

$$I(t) = I_1 + I_2(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0 t}{L}$$

Effekt levert av spenningskilden:

$$P(t) = V_0 I(t) = \frac{V_0^2}{R} + \frac{V_0^2 t}{L}$$

Energi levert av spenningskilden mellom $t = 0$ og $t = T$:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T P(t)dt \\ &= \frac{V_0^2 T}{R} + \frac{V_0^2 T^2}{2L} \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier ($T = 10$ s):

$$U \simeq 50 \text{ kJ}$$