NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME I
Mandag 17. desember 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle teller like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Dette er tatt direkte fra det ukentlige sammendraget av den aktuelle forelesningen:

- Diamagnetisme: Det påtrykte feltet $\boldsymbol{B}$ påvirker elektronets banebevegelse slik at vi får indusert en endring $\Delta\boldsymbol{m}$ i magnetisk dipolmoment med motsatt retning av $\boldsymbol{B}$. Har en slik diamagnetisk respons i alle atomer, men da den er svak, observeres den typisk bare i materialer med null permanent atomært magnetisk dipolmoment.

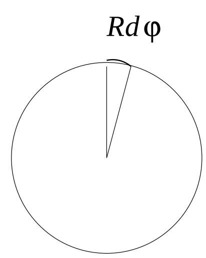
- Paramagnetisme: I materiale med atomære magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m} \neq 0$ rettes $\boldsymbol{m}$ inn langs det påtrykte magnetfeltet $\boldsymbol{B}$, analogt en elektrisk dipol som rettes inn langs et påtrykt elektrisk felt $\boldsymbol{E}$.

- Ferromagnetisme: Har *vekselvirkende* atomære magnetiske dipolmoment på naboatomer, slik at det blir energetisk foretrukket med en bestemt orientering av de ulike $\boldsymbol{m}$. Ferromagnet: Parallelle $\boldsymbol{m}$ foretrekkes. Antiferromagnet: Antiparallelle $\boldsymbol{m}$ foretrekkes.

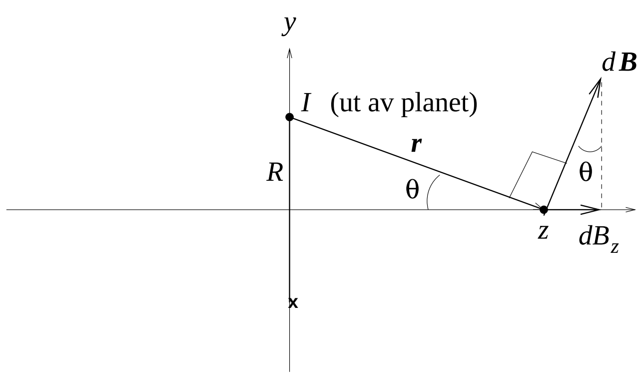
b) Av symmetrigrunner må magnetfeltet peke i z-retning på z-aksen. Dette er også gitt i figuren i oppgaveteksten. Her må vi ta utgangspunkt i Biot-Savarts lov for å bestemme magnetfeltet. Vektorene $I\, d\boldsymbol{l}$ og $\hat{r}$ står vinkelrett på hverandre. Dermed er

$$|I\, d\boldsymbol{l} \times \hat{r}| = IR\, d\phi \cdot 1$$

ettersom et kurveelement dl langs en sirkel er lik radien R multiplisert med vinkelelementet $d\phi$:



Retningen på $d\boldsymbol{B}$ må bli som vist i figuren:



Fra figuren ser vi at

$$\frac{dB_z}{dB} = \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

og det er jo nettopp z-komponenten av magnetfeltet vi her er ute etter. Absoluttverdien til $d\boldsymbol{B}$ blir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2}$$

slik at

$$dB_z = dB \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 IR^2\,d\phi}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale z-komponenten, og dermed det totale magnetfeltet, får vi deretter ved å integrere opp bidragene fra alle strømelementene i hele ringen, dvs ved å integrere dette uttrykket over vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

som skulle vises.

c) På z-aksen bidrar begge ringene med et magnetfelt som peker i positiv z-retning. Ringene har sentrum henholdsvis i $z = d/2$ og $z = -d/2$. Feltstyrken på z-aksen må da bli

$$B(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2[(z - d/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 IR^2}{2[(z + d/2)^2 + R^2]^{3/2}}$$

En felles faktor $\mu_0 IR^2/2$ kan droppes når vi skal vise at $B'(0) = 0$. Vi ser på funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{3/2}}$$

og deriverer mhp z:

$$f'(z) = -\frac{3(z - d/2)}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{5/2}} - \frac{3(z + d/2)}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{5/2}}$$

Innsetting av $z = 0$ gir $f'(0) = 0$, dvs $B'(0) = 0$, som skulle vises.
Vi skal deretter finne den verdi av d som gir $B''(0) = 0$. Vi kan da se på funksjonen

$$g(z) = \frac{z - d/2}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{5/2}} + \frac{z + d/2}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{5/2}}$$

Derivasjon mhp z gir

$$g'(z) = \frac{1}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{5/2}} + \frac{1}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{5/2}} - \frac{5(z - d/2)^2}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{7/2}} - \frac{5(z + d/2)^2}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{7/2}}$$

Innsetting av $z = 0$ gir

$$g''(0) = \frac{2}{(d^2/4 + R^2)^{5/2}} - \frac{10d^2/4}{(d^2/4 + R^2)^{7/2}} = \frac{2R^2 - 2d^2}{(d^2/4 + R^2)^{7/2}}$$

som forsvinner dersom $d = R$.

Med $d = R$ blir feltstyrken i $z = 0$

$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\left(\frac{5R^2}{4}\right)^{-3/2} + \left(\frac{5R^2}{4}\right)^{-3/2}\right] = \ldots = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$$

OPPGAVE 2

a) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling ligger alt til rette for å anvende Gauss' lov,

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

der q er netto ladning innenfor den kuleformede gaussflaten som vi integrerer over på venstre side. Vi har ingen ladning innenfor $r = a$, så vi kan umiddelbart konkludere med at $E = 0$ når $r < a$. Videre, hvis vi velger en gaussflate med $r > 2a$, vil all ladningen i kuleskallet ligge innenfor gaussflaten. La oss regne ut denne ladningen Q:

$$Q = \int_a^{2a} \rho_0 \frac{a^3}{r^3} \cdot 4\pi r^2\, dr = 4\pi\rho_0 a^3 \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = 4\pi\rho_0 a^3 \ln 2$$

Her har vi valgt et kuleskall med radius r og tykkelse dr som volumelement, standard når vi skal integrere en kulesymmetrisk størrelse.
Integralet på venstre side av Gauss' lov blir i alle tilfelle $E(r) \cdot 4\pi r^2$. Med $r > 2a$ har vi da umiddelbart

$$E(r) = \frac{4\pi\rho_0 a^3 \ln 2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3 \ln 2}{\varepsilon_0 r^2}$$

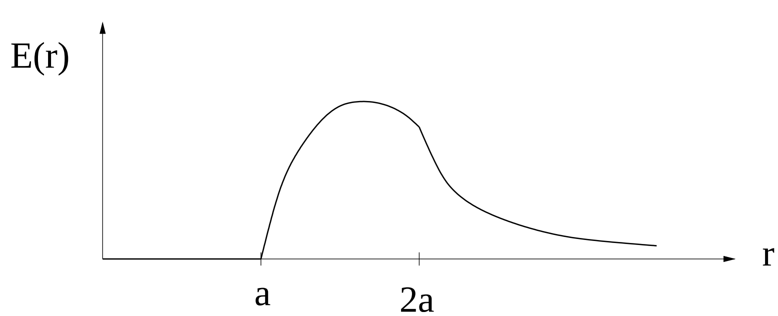
Det gjenstår å bestemme feltstyrken inne i kuleskallet. For en gaussflate med radius r et sted mellom a og $2a$ har vi følgende ladning innenfor gaussflaten:

$$q(r) = \int_a^{r} \rho_0 \frac{a^3}{(r')3} \cdot 4\pi (r')^2\, dr' = 4\pi\rho_0 a^3 \int_a^{r} \frac{dr'}{r'} = 4\pi\rho_0 a^3 \ln\frac{r}{a}$$

Feltstyrken inne i kuleskallet blir dermed

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3 \ln(r/a)}{\varepsilon_0 r^2}$$

Skisse av $E(r)$:



b) Polarisering av dielektrikumet betyr at permanente elektriske dipoler rettes inn langs det ytre elektriske feltet (her skapt av det ladde kuleskallet innenfor), eventuelt at det induseres elektriske dipoler dersom dielektrikumet ikke allerede har permanente elektriske dipoler. Nettoeffekten av en slik innretting er at det induseres en netto ladning på dielektrikumets overflater, negativ på indre og positiv på ytre overflate, dersom kuleskallet innenfor er positivt ladd. Den elektriske feltstyrken endres kun inne i dielektrikumet, sett i forhold til systemet uten dielektrikum til stede.
Vi bestemmer E inne i dielektrikumet ved å ta utgangspunkt i Gauss' lov for den elektriske forskyvningen $\boldsymbol{D}$. Med $r > 2a$ finner vi

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q = 4\pi \rho_0 a^3 \ln 2$$

dvs

$$D(r) = \frac{\rho_0 a^3 \ln 2}{r^2}$$

Deretter kan vi bruke at $D(r) = \varepsilon E(r) = \varepsilon_r \varepsilon_0 E(r)$ til å finne at

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\rho_0 a^3 \ln 2}{5 \varepsilon_0 r^2}$$

inne i dielektrikumet. Med andre ord, en faktor $\varepsilon_r = 5$ redusert i forhold til om det ikke var et dielektrikum til stede.
I absoluttverdi tilsvarer indusert ladning pr flateenhet verdien av (normalkomponenten av) polariseringsvektoren $\boldsymbol{P}$. Vi har $P(r) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E(r) = 4\varepsilon_0 E(r)$ slik at

$$\sigma(2a) = P(2a) = 4\varepsilon_0 E(2a) = \frac{\rho_0 a \ln 2}{5}$$

og

$$\sigma(3a) = P(3a) = 4\varepsilon_0 E(3a) = \frac{4\rho_0 a \ln 2}{45}$$

Som sagt tidligere: negativ indusert ladning innerst, positiv indusert ladning ytterst.

OPPGAVE 3

a) I en krets der alle strømmer er konstante (dvs tidsuavhengige), representerer en induktans L rett og slett en kortslutning, mens en kapasitans C representerer en åpen krets. Vi står da essensielt igjen med en seriekobling av 3 motstander R, altså en total motstand $3R$, slik at strømstyrken blir

$$I = \frac{V_0}{3R} = 0.25\,\mathrm{mA}$$

Det blir null spenningsfall over kondensatorene 3 og 4 slik at $Q_3 = Q_4 = 0$. Spenningsfallet over kondensator 1 blir $2V_0/3 = 1.0$ kV, over nr 2 $V_0/3 = 0.5$ kV. Dermed: $Q_1 = 2.0\,\mu$C og $Q_2 = 1.0\,\mu$C.

b) Her må den totale strømmen I som "leveres" av spenningskilden fordele seg på en strøm I_R gjennom motstanden og en strøm I_L gjennom induktansen:

$$I = I_R + I_L$$

(Dvs: Kirchhoffs strømregel.) Videre må vi gjenfinne den påtrykte spenningen som et tilsvarende spenningsfall, både over motstanden og over induktansen. Med andre ord:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= R I_R \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

(Dvs: Kirchhoffs spenningsregel.) Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} \cos \omega t \\ I_L &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t$$

Vi kan skrive denne summen av to ledd på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

ved å bruke den trigonometriske relasjonen

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Dermed:

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

Sammenligning med uttrykket for $I(t) = I_R + I_L$ gir oss følgende to ligninger for de to ukjente størrelsene I_0 og α:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{R} &= I_0 \cos \alpha \\ \frac{V_0}{\omega L} &= I_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Dette ligningssettet har løsning

$$\tan \alpha = \frac{R}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

og

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)^{1/2}$$

Fra definisjonen av impedans, $Z = V_0 / I_0$, ser vi at impedansen til en parallellkobling er

$$Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)^{-1/2}$$

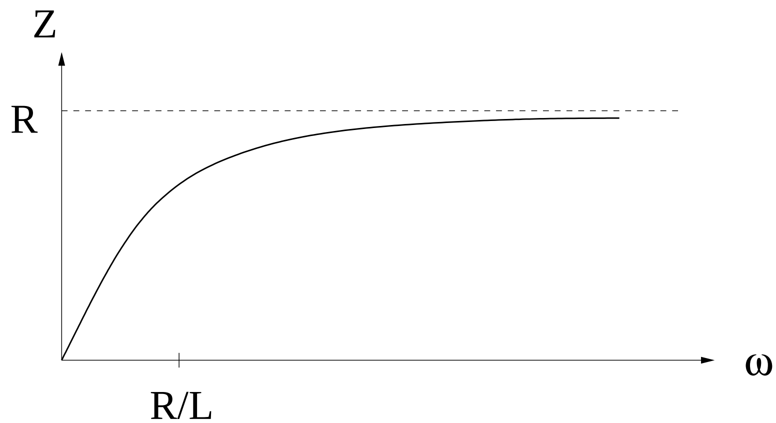
Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er liten, dvs $\omega \ll R/L$, vil leddet $1/\omega^2 L^2$ dominere i forhold til $1/R^2$, slik at

$$Z \simeq \omega L$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er stor, dvs $\omega \gg R/L$, vil leddet $1/R^2$ dominere i forhold til $1/\omega^2 L^2$, slik at

$$Z \simeq R$$

Skisse av $Z(\omega)$:



OPPGAVE 4

a) Her henvises det til forelesningene, der den uendelig lange spolen er behandlet i detalj.

b) Den tidsavhengige strømmen i spoletråden medfører en tidsavhengig magnetisk feltstyrke inne i spolen,

$$B(t) = \mu_0 n I_0 (1 - t/\tau)$$

og dermed en tidsavhengig magnetisk fluks omsluttet av den ladde ringen,

$$\phi(t) = A \cdot B(t) = \pi a^2 \mu_0 n I_0 (1 - t/\tau)$$

Induksjonsloven gir da en elektromotorisk spenning i den ladde ringen:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \pi a^2 \mu_0 n I_0 / \tau$$

Ettersom fluksen oppover (se figur i oppgaveteksten) avtar, må retningen på $\mathcal{E}$ bli mot klokka dersom vi ser ned langs spolens akse (Lenz' lov).

c) La oss (f.eks) anta at ladningen på ringen er positiv. Den induserte spenningen vil da resultere i en kraft på ladningen slik at ringen begynner å rotere mot klokka, når vi ser ned langs spolens akse. Dette er (igjen) Lenz' lov: Den roterende ringen innebærer en strøm, og dermed et magnetfelt, og dermed en magnetisk fluks omsluttet av ringen. Rotasjon mot klokka gir fluks oppover innenfor ringen: Den avtagende omsluttede fluksen (pga magnetfeltet i spolen) forsøkes motvirket.

Vi skal så bestemme ringens endelige vinkelhastighet ω. Den induserte spenningen $\mathcal{E}$ innebærer (som gitt i oppgaven) et indusert elektrisk felt, bestemt ved at $\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$. Av symmetrigrunner må det i alle små deler av ringen, med lengde $dl = Rd\phi = 3ad\phi$, induseres like mye spenning,

$$d\mathcal{E} = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E_\phi \cdot 3a \cdot d\phi$$

Her er E_ϕ komponenten av $\boldsymbol{E}$ tangentielt til ringen, dvs den komponenten vi trenger for å bestemme den tangentielle kraften, dvs den som gir ringen økt rotasjonshastighet. [Kommentar: Her er det faktisk slik at $\boldsymbol{E}$ *er* tangentiell til ringen, noe som kan vises ved hjelp av Gauss' lov. Men selv om $\boldsymbol{E}$ hadde hatt en komponent normalt på ringen, måtte, av symmetrigrunner, tangentialkomponenten E_ϕ ha vært like stor rundt hele ringen. Og det er alt vi trenger for å løse denne oppgaven.] På en slik liten lengde av ringen er det en ladning dq, slik at kraften (tangentielt) som virker på den lille lengden blir

$$dF = E_\phi \cdot dq = E_\phi \cdot \lambda \cdot 3a \cdot d\phi$$

La oss bestemme E_ϕ. Vi har allerede bestemt total indusert spenning. Samtidig er

$$\mathcal{E} = \oint d\mathcal{E} = E_\phi \cdot 3a \cdot \oint d\phi = E_\phi \cdot 3a \cdot 2\pi$$

slik at

$$\mathcal{E} = \pi a^2 \mu_0 n I_0 / \tau = E_\phi \cdot 3a \cdot 2\pi$$

Følgelig er

$$E_\phi = a\mu_0 n I_0 / 6\tau$$

Kraften på dq blir da

$$dF = \frac{a\mu_0 n I_0}{6\tau} \cdot \lambda \cdot 3a \cdot d\phi$$

Total kraft på hele ringen blir

$$F = \oint dF = \frac{a\mu_0 n I_0}{6\tau} \cdot \lambda \cdot 3a \cdot \oint d\phi = \frac{\pi a^2 \lambda \mu_0 n I_0}{\tau}$$

I følge Newtons 2. lov er da

$$m\frac{dv}{dt} = F = \frac{\pi a^2 \lambda \mu_0 n I_0}{\tau}$$

slik at slutthastigheten (hele tiden: tangentielt) blir

$$v = \int_0^v dv = \int_0^\tau \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m}\tau = \frac{\pi a^2 \lambda \mu_0 n I_0}{m}$$

Slutt-vinkelhastigheten blir dermed

$$\omega = \frac{v}{3a} = \frac{\pi a \lambda \mu_0 n I_0}{3m}$$

Legg merke til at det ikke spiller noen rolle hvor raskt vi skrur av magnetfeltet i spolen (dvs: ω avhenger ikke av τ). Ringens vinkelhastighet, og dermed også dreieimpuls, er bestemt av den totale fluksendringen innenfor ringen.