NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

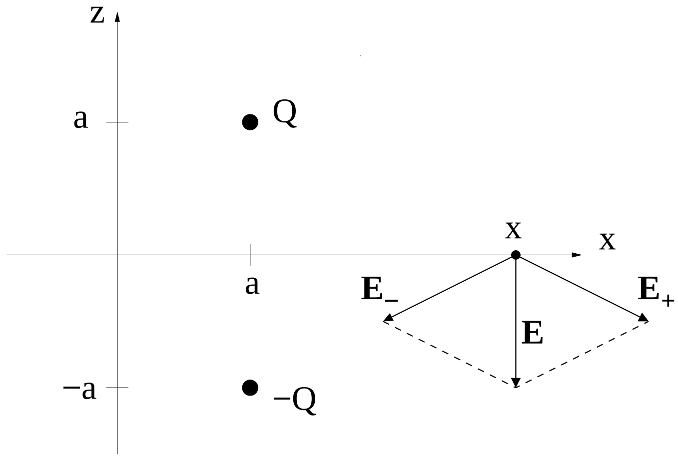
LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Tirsdag 27. mai 2008 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som normalt teller like mye under bedømmelsen. Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Dipolmoment: $\boldsymbol{p} = 2Qa\,\hat{z}$.

Figur som viser bidragene $\boldsymbol{E}_+$ og $\boldsymbol{E}_-$:

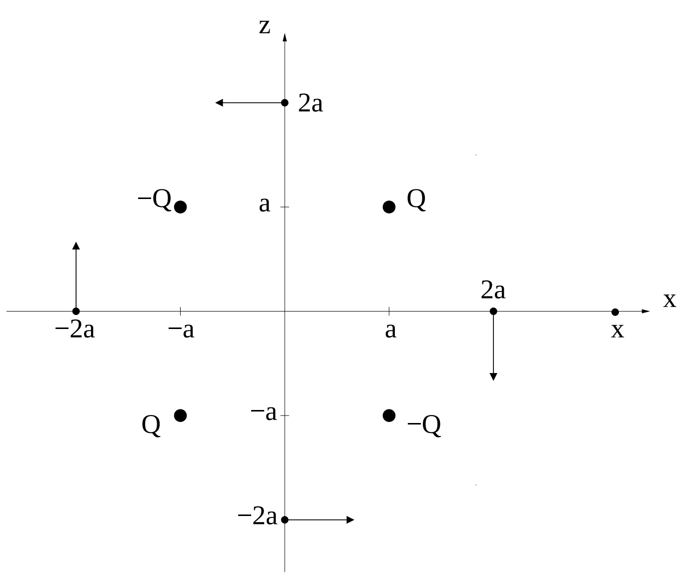


Med $E(x) = |\boldsymbol{E}(x)|$ ser vi at $\boldsymbol{E}(x) = -E(x)\,\hat{z}$.
Avstand fra $\pm Q$ til et punkt på x-aksen: $r = \sqrt{(x-a)^2 + a^2}$.
z-komponenten av $\boldsymbol{E}_\pm$: $|\boldsymbol{E}_\pm|\,\cos\theta$ der $\cos\theta = a/r$ og $|\boldsymbol{E}_\pm| = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
Dermed:

$$E(x) = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0}\,\left(x^2 - 2ax + 2a^2\right)^{-3/2}$$

Altså er $\beta = Qa/2\pi\varepsilon_0$.

b) Den nye dipolen må også gi et bidrag til feltet på positiv x-akse som peker i z-retning, men nå i positiv z-retning. Den nye dipolen er litt lenger unna punktet $(2a, 0)$ enn den opprinnelige dipolen, så totalt felt $\boldsymbol{E}(2a, 0)$ må fortsatt peke i negativ z-retning. Tilsvarende argumentasjon for de tre andre punktene gir:



På y-aksen blir $\boldsymbol{E} = 0$, av symmetrigrunner.
Bidraget fra den nye dipolen blir det samme som for den gamle, bortsett fra at vi må erstatte a med $-a$:

$$E(x) = \frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0}\left[\left(x^2 - 2ax + 2a^2\right)^{-3/2} - \left(x^2 + 2ax + 2a^2\right)^{-3/2}\right]$$

c) Når $x \gg a$ er

$$\left(x^2 - 2ax + 2a^2\right)^{-3/2} \simeq x^{-3}$$

så for dipolen i a) er

$$E(x) \simeq \frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

For systemet i b) (som er en såkalt kvadrupol) avtar E raskere, pga delvis kansellering av bidragene fra de to dipolene. For $x \gg a$ har vi

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - 2ax + 2a^2\right)^{-3/2} - \left(x^2 + 2ax + 2a^2\right)^{-3/2} \\
= \;& x^{-3}\left[\left(1 - 2a/x + 2a^2/x^2\right)^{-3/2} - \left(1 + 2a/x + 2a^2/x^2\right)^{-3/2}\right] \\
\simeq \;& x^{-3}\left[(1 + 3a/x) - (1 - 3a/x)\right] \\
= \;& x^{-3} \cdot 6a/x
\end{aligned}$$

slik at

$$E(x) \simeq \frac{3Qa^2}{\pi\varepsilon_0 x^4}$$

OPPGAVE 2

a) Symmetri $\Rightarrow \boldsymbol{E} = E(s)\hat{s}$, der $\hat{s}$ står normalt på z-aksen (dvs sylinderkoordinater). Vi velger sylinder med radius s og lengde Δz som gaussflate og får

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} &= E(s) \cdot 2\pi s \cdot \Delta z = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \lambda \cdot \Delta z \\
\Rightarrow E(s) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}
\end{aligned}$$

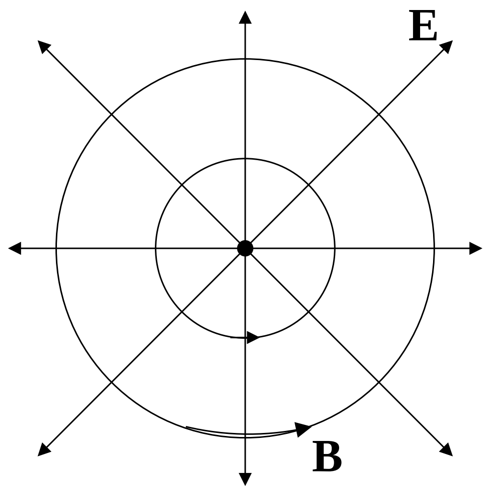
Symmetri $\Rightarrow \boldsymbol{B} = B(s)\hat{\phi}$, der $\hat{\phi}$ ligger tangentielt til sirkel med radius s og sentrum på z-aksen. Strømmen på z-aksen er:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dz}{dt} = \lambda u$$

Vi velger sirkel som amperekurve og får

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} &= B(s) \cdot 2\pi s = \mu_0 \lambda u \\
\Rightarrow B(s) &= \frac{\mu_0 \lambda u}{2\pi s}
\end{aligned}$$

Feltlinjer (med z-aksen ut av planet):



b) Ved $t = 0$ er partikkelen i x_0, slik at $s = x_0$, $\hat{s} = \hat{x}$ og $\hat{\phi} = \hat{y}$.
Elektrisk kraft:

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0}\,\hat{x}$$

Magnetisk kraft:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = qv_0 \cdot \frac{\mu_0 \lambda u}{2\pi x_0}\,(\hat{x} \times \hat{y}) = \frac{qv_0\mu_0\lambda u}{2\pi x_0}\,\hat{z}$$

Altså: elektrisk kraft i x-retning og magnetisk kraft i z-retning ved $t = 0$. (Senere vil den elektriske kraften uansett peke i x-retning, mens den magnetiske kraften også vil få en x-komponent.)
Forholdet mellom de to kreftene:

$$|\boldsymbol{F}_m|/|\boldsymbol{F}_e| = \mu_0\varepsilon_0 v_0 u = v_0 u/c^2$$

der c er lyshastigheten i vakuum. Så vi ser at den magnetiske kraften typisk er meget svak i forhold til den elektriske.
Det er oppgitt at bevegelsen forblir i xz-planet, hvilket også er greit å innse, ettersom ingen av kreftene har noen ϕ-komponent (ved $t = 0$: y-komponent), og $v_\phi = 0$ i utgangspunktet.
Vi har dermed, for akselerasjon, hastighet og posisjon:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \ddot{x}\hat{x} + \ddot{z}\hat{z} \\
\boldsymbol{v} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z} \\
\boldsymbol{r} &= x\hat{x} + z\hat{z}
\end{aligned}$$

Total kraft på partikkelen er:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m \\
&= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\,\hat{x} + q(\dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z}) \times \left(\frac{\mu_0\lambda u}{2\pi x}\right)\hat{y} \\
&= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\,\hat{x} + \frac{q\dot{x}\mu_0\lambda u}{2\pi x}\,\hat{z} - \frac{q\dot{z}\mu_0\lambda u}{2\pi x}\,\hat{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{x}\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}(1-\mu_0\varepsilon_0\dot{z}u)+\hat{z}\frac{q\dot{x}\mu_0\lambda u}{2\pi x}\\
&= \hat{x}F_x+\hat{z}F_z
\end{aligned}
$$

Bevegelsesligningene er

$$m\ddot{x}=F_x \qquad ; \qquad m\ddot{z}=F_z$$

Partikkelen vil bevege seg bort fra z-aksen, men få en svak avbøyning i positiv z-retning.

OPPGAVE 3

a) Hvis en ikke husker sammenhengen mellom R og l, σ og A, er det fort gjort å utlede fra Ohms lov:

$$j=\sigma E \Rightarrow I/A=\sigma V/l \Rightarrow R=V/I=l/\sigma A$$

Tallverdier:

$$R=\frac{2.00\cdot 10^{-2}}{21.7\cdot 1.00\cdot 10^{-6}}\,\Omega \simeq 922\,\Omega$$

Videre, hvis en ikke husker uttrykket for kapasitansen C:

$$C=Q/V=\sigma A/Ed=\sigma A/(\sigma d/\varepsilon)=\varepsilon_r\varepsilon_0 A/d$$

Tallverdier:

$$C=\left(8.00\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 5.00\cdot 10^{-4}/1.00\cdot 10^{-4}\right)\ \mathrm{F}\simeq 354\ \mathrm{pF}$$

b) Magnetfelt inne i lang spole:

$$B=\mu n I=\mu_r\mu_0\frac{N}{l}I$$

Total omsluttet fluks blir

$$\phi=NBA=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{l}IA$$

slik at induktansen blir

$$L=\phi/I=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{l}A$$

Tallverdier:

$$L=1200\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{632^2}{1.00}\cdot 0.50\cdot 10^{-4}\ \mathrm{H}\simeq 0.030\ \mathrm{H}$$

OPPGAVE 4

a) Her ligger påtrykt spenning $V(t)$ over alle de tre komponentene, så vi kan regne ut de tre bidragene til total strøm I hver for seg.
Motstanden:

$$V = RI_R \Rightarrow I_R(t) = \frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

Kapasitansen:

$$V = Q/C \Rightarrow Q = V_0 C\cos\omega t \Rightarrow I_C(t) = dQ/dt = -V_0\omega C\sin\omega t$$

Induktansen:

$$V = L dI_L/dt \Rightarrow \dot{I}_L = \frac{V_0}{L}\cos\omega t \Rightarrow I_L(t) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$$

b) Summen av de tre bidragene inneholder både sinus og cosinus, så vi bruker oppgitt formel og skriver om $I(t)$:

$$I(t) = I_0\cos(\omega t - \alpha) = I_0\cos\alpha\cos\omega t + I_0\sin\alpha\sin\omega t$$

Dette skal være lik summen av de tre bidragene regnet ut i a). Dermed:

$$\begin{aligned} I_0\cos\alpha &= V_0/R \\ I_0\sin\alpha &= V_0\,(1/\omega L - \omega C) \end{aligned}$$

Vi finner I_0 ved å kvadrere disse to ligningene og legge sammen på begge sider:

$$\begin{aligned} I_0^2\cdot 1 &= V_0^2\left[1/R^2 + (1/\omega L - \omega C)^2\right] \\ \Rightarrow I_0 &= \frac{V_0}{R}\left[1 + \left(\frac{R}{\omega L} - \omega RC\right)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Og vi finner fasevinkelen α ved å dividere andre ligning med den første:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan\left(\frac{R}{\omega L} - \omega RC\right) \end{aligned}$$

Kretsens impedans blir

$$Z = V_0/I_0 = R/\sqrt{1 + (R/\omega L - \omega RC)^2}$$

Vi trekker faktoren $(\omega RC)^2$ utenfor parentesen under kvadratroten og får

$$Z = R/\sqrt{1 + (\omega RC)^2\,(1 - 1/\omega^2 LC)^2}$$

som er på den oppgitte formen, med

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad ; \qquad \omega_1 = 1/RC$$

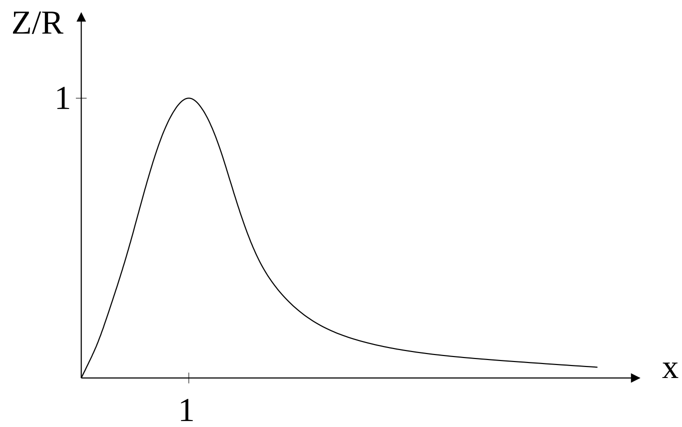
Innsetting av tallene fra oppgave 3 gir verdien $3\cdot 10^6$ for ω_1 og $3\cdot 10^5$ for ω_0.

c) Med $\omega_1 = \omega_0$ i tallverdi og $x = \omega/\omega_0 = \omega/\omega_1$ får vi

$$\begin{aligned} Z(x)/R &= \left(1 + x^2\left(1 - x^{-2}\right)^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(1 + x^2 - 2 + x^{-2}\right)^{-1/2} \\ &= \left(x^2 - 1 + x^{-2}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Her ser vi f.eks. raskt at $Z(0)/R = 0$, $Z(\infty)/R = 0$ og $Z(1)/R = 1$.

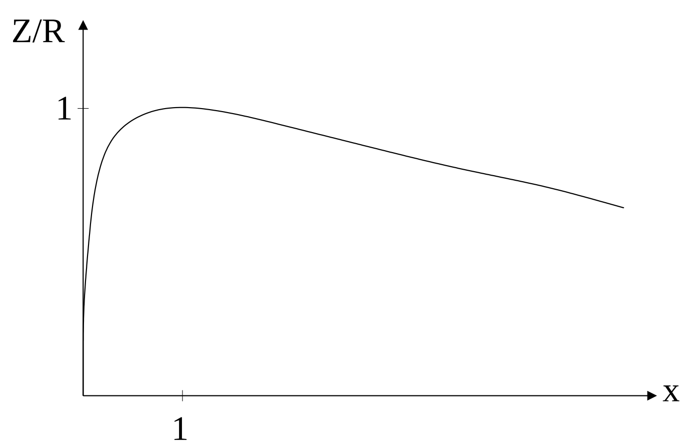
Skisse:



Dersom noen her har brukt $\omega_1 = 10\omega_0$, dvs $\omega/\omega_1 = x/10$, fikk de

$$\frac{Z(x)}{R} = \left(\frac{49}{50} + \frac{x^2}{100} + \frac{1}{100x^2}\right)^{-1/2} \simeq \left(1 + \frac{x^2}{100} + \frac{1}{100x^2}\right)^{-1/2}$$

som ser omtrent slik ut:



I grensen $\omega \to 0$ blir en ideell induktans en kortslutning, så $Z(0) = 0$ virker fornuftig. Men: en lang tynn kobbertråd vil ha en viss resistans, $R_L = l/\sigma_{\mathrm{Cu}} \cdot S$, der l er spoletrådens lengde, σ_{Cu} er kobbers konduktivitet og S er trådens tverrsnitt. Dermed blir kretsens impedans (og nå, resistans) i grensen $\omega \to 0$

$$Z(0) = (1/R + 1/R_L)^{-1} = \frac{RR_L}{R + R_L}$$

En mer realistisk skisse enn den ovenfor vil derfor være (her med $\omega_1 = \omega_0$):