NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME

Onsdag 3. juni 2009 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 5 oppgaver. Løsningsforslaget er på 7 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1 (Elektrostatikk. Vekt: **a** teller 10%, **b** teller 20%. Totalt 30%.)

a.

i) Systemets netto ladning: $Q - Q = 0$.

ii) Systemets elektriske dipolmoment: $\boldsymbol{p} = \hat{x}\,(Q \cdot a + (-Q) \cdot 0) = Qa\,\hat{x}$.

iii) Elektrisk feltstyrke på x-aksen:

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

b.

i) Ladning pr lengdeenhet: $\pm\lambda = \pm Q/2a$

ii) Dette systemet har null elektrisk dipolmoment:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \int \boldsymbol{r}\,dq \\
&= \int_{-a}^{a} \hat{x}\,x\,\lambda\,dx + \int_{-a}^{a} \hat{y}\,y\,(-\lambda)\,dy \\
&= \frac{Q}{2a}\left(\hat{x}\int_{-a}^{a} x\,dx - \hat{y}\int_{-a}^{a} y\,dy\right) \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Dette kan en vel også innse direkte, av symmetrigrunner.

iii) Bidrag fra den positive ladningen på x-aksen:

$$E^+(x) = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\,dx'}{4\pi\varepsilon_0 (x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - a^2)}$$

Bidrag fra den negative ladningen på y-aksen:

$$\begin{aligned}
E^-(x) &= -\int_{-a}^{a} \frac{\lambda\,dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= -\frac{Qx}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_{-a}^{a} \frac{dy}{(y^2+x^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{Qx}{8\pi\varepsilon_0 a} \cdot \frac{2a}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2+a^2}}
\end{aligned}$$

Her har vi passet på å ta med kun x-komponenten, derfor faktoren $x/\sqrt{x^2+y^2}$ i første linje. Det totale feltet på x-aksen blir dermed

$$E(x) = E^+(x) + E^-(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2-a^2} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

iv) Langt ute på x-aksen, dvs der $x \gg a$, kan vi bruke oppgitt formel og rekkeutvikle de to funksjonene som inngår i $E(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-a^2} &= \frac{1}{x^2}\left(1 - a^2/x^2\right)^{-1} \simeq \frac{1}{x^2}\left(1 + a^2/x^2\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{a^2}{x^4} \\
\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} &= \frac{1}{x^2}\left(1 + a^2/x^2\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{x^2}\left(1 - a^2/2x^2\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{2x^4}
\end{aligned}$$

Dermed har vi, til ledende orden i a/x:

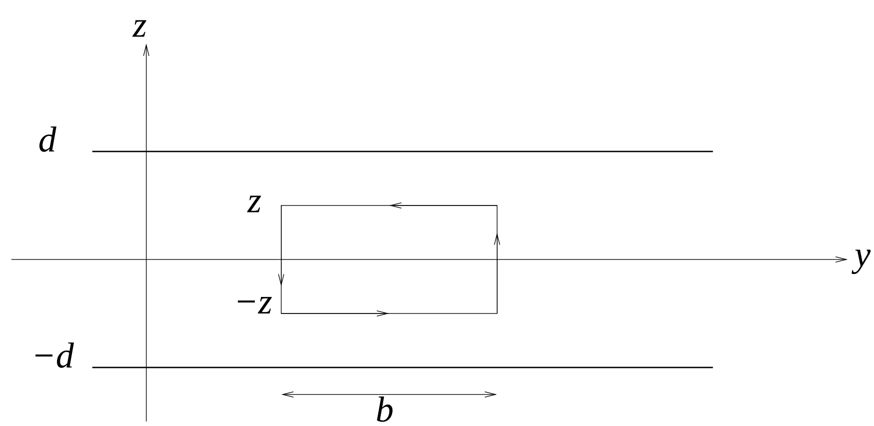
$$E(x) \simeq \frac{3Qa^2}{8\pi\varepsilon_0 x^4}$$

Det betyr at $n = 4$ og $\beta = 3Qa^2/8\pi\varepsilon_0$.
Kommentar: Hvis en her innser at det elektriske dipolmomentet er null, kan en uten videre konkludere med at n må være større enn 3. Feltet fra en dipol avtar som $1/r^3$, så hvis $p = 0$, må feltet avta raskere enn dette, minst som $1/r^4$. La oss si at vi da "gjetter" at $n = 4$. Da må konstanten β, av rent dimensjonsmessige grunner, være proporsjonal med faktoren Qa^2/ε_0. Tallfaktoren $3/8\pi$ kan vi derimot ikke fastslå uten å foreta hele utregningen.

OPPGAVE 2 (Magnetostatikk. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

a.

i) Ettersom B_0 er oppgitt å være en antisymmetrisk funksjon av z, velger vi et rektangel symmetrisk plassert omkring xy-planet, med bredde b i y-retning, høyde $2z$ i z-retning og flatenormal i x-retning:



Vi integrerer mot klokka på venstre side av Amperes lov og finner:

$$\oint \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = 2B_0(z) \cdot b = \mu_0 I_{\text{in}}(z)$$

Strømmen som er omsluttet av ampererektangelet er

$$I_{\text{in}}(z) = \int_{-z}^{z} j_0 b \; dz = 2j_0 bz$$

dersom $z < d$. Dersom rektangelet omslutter hele skiva, dvs $z > d$, er

$$I_{\text{in}}(z) = 2j_0 bd$$

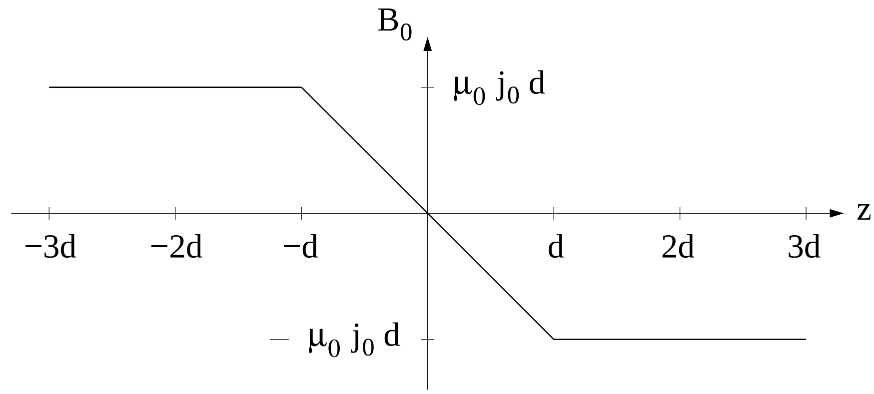
Magnetfeltet blir derfor

$$B_0(z) = \mu_0 j_0 d$$

på utsiden av skiva ($z > d$) og

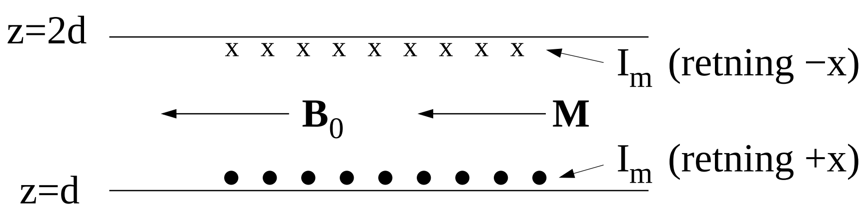
$$B_0(z) = \mu_0 j_0 z$$

inni skiva ($z < d$). Retningen på feltet er som angitt i oppgaveteksten, dvs i positiv y-retning for $z < 0$ og i negativ y-retning for $z > 0$.
ii) En skisse av $B_0(z)$, inklusive riktig fortegn, skulle dermed bli slik:



b.

i) Figur:



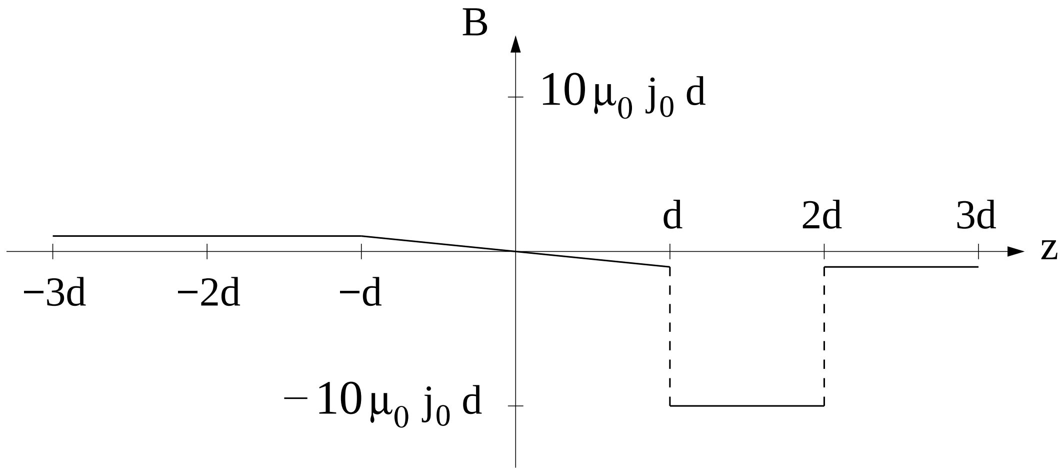
ii) Den magnetiserbare skiva ligger mellom $z = d$ og $z = 2d$, så alle feltstørrelser peker i negativ y-retning. Vi har $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}$ (uansett om vi er inne i denne skiva eller ei). Dermed har vi

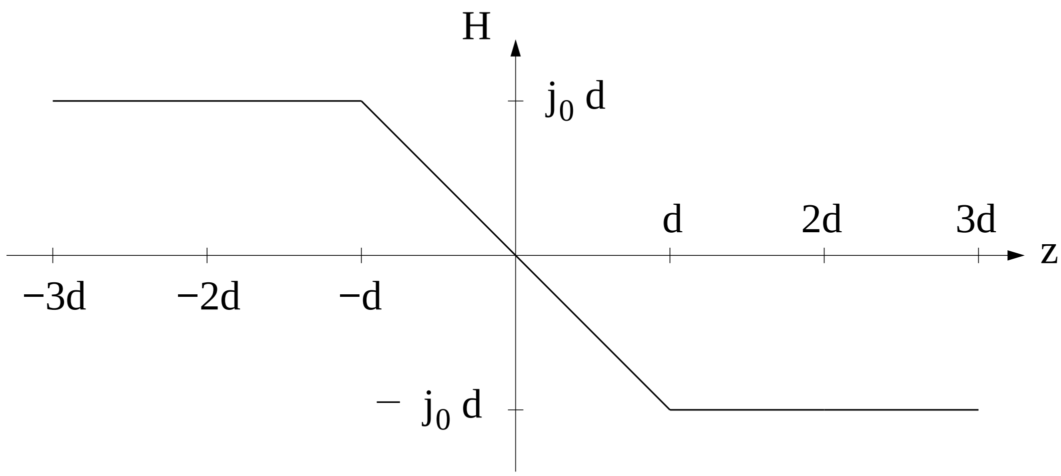
$$\boldsymbol{B} = \mu_r \boldsymbol{B}_0 = -\mu_r B_0 \hat{y} = -(10\mu_0 j_0 d)\hat{y}$$

for totalt magnetfelt inne i den magnetiserbare skiva. Med andre ord 10 ganger sterkere, som resultat av magnetiseringen.
H-feltet "ser" ikke noe til magnetiseringen og magnetiseringsstrømmen, så $\boldsymbol{H}$ er den samme som om den magnetiserte skiva ikke var der:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_0/\mu_0 = -j_0 d\hat{y}$$

Skisser av $B(z)$ og $H(z)$:





OPPGAVE 3 (DC–krets. Teller 10%.)

Med stasjonære forhold i en DC–krets representerer en induktans rett og slett en leder uten motstand, dvs en kortslutning, mens en kapasitans representerer en åpen krets, dvs uendelig motstand. Da er det klart at all strøm her vil gå gjennom grenen med induktansen. Dette gir:

$$I_R = I_C = 0, \quad I = I_L = V_0/2R = 2 \text{ A}, \quad Q = CV_C = 0$$

(Evt:

$$I_2 = I_3 = 0, \quad I_0 = I_1 = V_0/2R = 2 \text{ A}, \quad Q = CV_C = 0$$

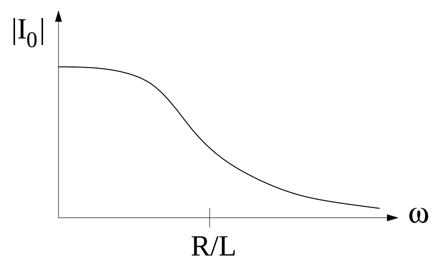
)

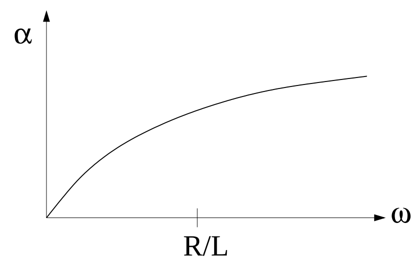
OPPGAVE 4 (AC–krets. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

a. Kretsens totale (komplekse) impedans er $Z = R + i\omega L$ med absoluttverdi $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ og fasevinkel $\alpha = \arctan(\omega L/R)$. Strømmens amplitude er da

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0/R}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}}$$

Skisser av disse størrelsene som funksjon av ω:





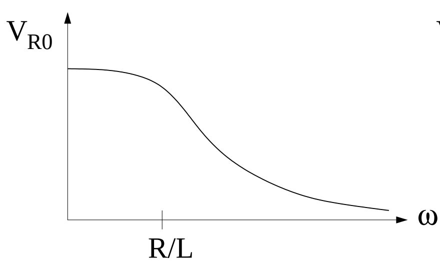
b. Her går samme strøm gjennom R og L. Da har vi

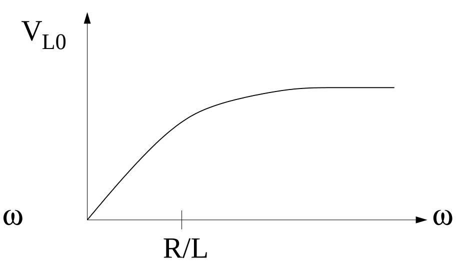
$$V_{R0} = |Z_R| \cdot |I_0| = R|I_0| = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}}$$

som stemmer med det oppgitte uttrykket når $\omega_0 = R/L$. Videre:

$$V_{L0} = |Z_L| \cdot |I_0| = \omega L|I_0| = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}}$$

som også stemmer med det oppgitte uttrykket, med samme ω_0.
Skisser av disse størrelsene som funksjon av ω:





Alternativ kvalitativ argumentasjon på denne oppgaven: For riktig lave frekvenser er induktansen praktisk talt en kortslutning. Da må hele den påtrykte spenningen falle over motstanden R, og en må forvente $|I_0| \simeq V_0/R$, $\alpha \simeq 0$, $V_{R0} \simeq V_0$ og $V_{L0} \simeq 0$. For riktig høye frekvenser blir indusert motspenning i induktansen dominerende. Da faller hele den påtrykte spenningen over induktansen, og vi forventer $|I_0| \simeq 0$, $\alpha \simeq \pi/2$ (fordi $V_L \sim dI/dt$, som gir faseforskjell $\pi/2$ mellom strøm og spenning), $V_{R0} \simeq 0$ og $V_{L0} \simeq V_0$. Det må videre eksistere en slags karakteristisk frekvens som definerer overgangen mellom "lave" og "høye" frekvenser, og det er bare R og L som kan bestemme denne frekvensen. Av dimensjonsmessige grunner må en slik overgangsfrekvens være proporsjonal med R og omvendt proporsjonal med L, f.eks. $\omega_0 = R/L$.

OPPGAVE 5 (Induksjon. Hver deloppgave **a** og **b** teller 10% hver. Totalt 20%.)

a.

i) Arealet som strømsløyfa omslutter er, med x-aksen horisontalt, $L \cdot x$, og dette øker lineært med tiden, $dA/dt = Ldx/dt = Lv$. Omsluttet magnetisk fluks er $\phi_m = B \cdot A = BLx$, slik at indusert ems i strømsløyfa blir $V = d\phi_m/dt = BLdx/dt = BLv$. Sløyfa har resistans R, så ifølge Ohms lov blir strømmen i kretsen

$$I = V/R = BLv/R$$

ii) Strømmen går mot klokka. Lenz' lov: Økende areal gir økende omsluttet magnetisk fluks inn i planet. Strømmen må da gå i en slik retning at fluksen på grunn av indusert I peker ut av planet når vi er på innsiden av sløyfa.

b.

i) Strømmen I går oppover i metallstanga, magnetfeltet peker inn i planet, så magnetisk kraft på strømmen I blir rettet mot venstre og er

$$F = ILB = B^2L^2v/R$$

(Størrelsen λ i oppgaveteksten er med andre ord $\lambda = BL/R$.)

ii) Når stanga slippes, blir eneste kraft den bremsende magnetiske krafta, mot venstre. Newtons 2. lov gir oss da følgende bevegelsesligning:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

Dette er en 1. ordens differensialligning for $v(t)$, som er grei å løse:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR}dt \\
\Rightarrow \ln v &= -\frac{B^2L^2}{mR}t + \ln k \\
\Rightarrow v(t) &= k\, e^{-B^2L^2t/mR} \\
\Rightarrow v(t) &= v_0\, e^{-B^2L^2t/mR}
\end{aligned}$$

der vi brukte initialbetingelsen $v(0) = v_0$. Tidsparameteren τ innført i oppgaveteksten er følgelig

$$\tau = \frac{mR}{B^2L^2}$$

iii) Stanga beveger seg en lengde $dx = v(t)\,dt$ i tidsrommet $(t, t+dt)$. Total lengde får vi ved å integrere dette fra $t = 0$ til $t = \infty$:

$$x = \int_0^\infty v(t)\,dt = v_0 \int_0^\infty e^{-t/\tau}\,dt = v_0\tau = \frac{v_0 mR}{B^2L^2}$$