FY1003 Elektr. & magnetisme
Eks. 20. aug. 2010 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	E	B	E	E	C	C	D	B	D	A

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) E. Ladningene Q_1 og Q_3 gir like felt i motsatte retninger og nuller derfor hverandre ut. Ladningen Q_2 gir felt i horisontal retning til venstre, dvs fra Q_2 til P. Ingen alternativ er rett.

b) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q. Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

c) E. $Q = CV = \epsilon_{\rm r}\epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

d) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

e) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial (BA\cos\theta)}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = BA\sin\theta\cdot\omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

f) C. Ladningene i ledningen påvirkes av en kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Denne er null bare når $\vec{v}$ og $\vec{B}$ er parallell (forutsatt $\vec{v}$ eller $\vec{B}$ ikke er null).

g) D. Lysstyrke prop. med effekt $P = UI = U^2/R$. Størst spenning gir størst lysstyrke. Når pære 2 skrus ut dobles motstanden i høyre del og spenningen øker. Dermed øker lysstyrken for pære 3. Kan også sette opp uttrykk.

h) B. Sirkelbevegelsen forårsakes av Lorentzkraften, så vi må ha $evB_0 = m_e v^2/r$, med $v = |\vec{v}| = \sqrt{2}v_0$. Dermed er $r = \sqrt{2}m_e v_0/eB_0$.

i) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

j) A. Det oppgitte potensialet betyr at det elektriske feltet er $\vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} = -kV_0\,\hat{\mathbf{j}}$ slik at energien per volumenhet er $u = \epsilon_0 E^2/2 = \epsilon_0 k^2 V_0^2/2$.Det oppgitte området har volum $(\pi/k)^3$, slik at den elektriske energien i dette området blir $U = u\,(\pi/k)^3 = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3/2k$.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ: $\oint \epsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\rm encl}$. På endeflatene er $\vec{E} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda\ell & r\in[a,b] \\ 0 & r > b \end{cases} \qquad \text{altså kan vi skrive } \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r}, \ \text{ der } \qquad \vec{E}_0 = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & r\in[a,b] \\ \vec{0} & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\cdot \mathrm{d}r = \underline{-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cdot \ln\frac{a}{b} = E_0\cdot\ln\frac{b}{a}}\,,$$

der vi har integrert radielt slik at $\mathrm{d}\vec{s} = \hat{\mathbf{r}}\ \mathrm{d}r$.

Nå er $V(b) = 0$ og idet $b > a$ og $\lambda > 0$ får vi at $V(a) > 0$. Et positivt ladd legeme har alltid høyere potensial enn et negativt.

c) Uttrykk for elektrostatisk energitetthet (energi per volum):

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \,.$$

Totalenergien finnes ved å integrere over sylindervolumet mellom $r = a$ og $r = b$ (der $E = E_0/r \neq 0$), med infinitesimalt sylindervolum $\mathrm{d}V = 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell$. (Det er brukt W i oppgaveteksten, men bruker her U som er brukt for el.statisk energi på formelarket.)

$$W = U = \int_{\text{syl}} u \,\mathrm{d}V = \int_{\text{syl}} \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{E_0}{r}\right)^2 \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell = \pi\epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi\epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \ln\frac{b}{a} \,.$$

Per lengdeenhet og innsatt E_0:

$$W' = U' = \frac{U}{\ell} = \pi\epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{b}{a}} \quad \left(= E_0^2 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot \ln\frac{b}{a} \right) \,.$$

Alternativt kan oppgaven løses ved å integrere over ladning, $U = \int \frac{1}{2} V \cdot \mathrm{d}q$. Det er ladning kun ved flatene $r = a$ og $r = b$, og dessuten er potensialet ved b lik null: $V(b) = 0$, slik at energi per lengdeenhet blir

$$U' = \frac{U}{\ell} = \frac{1}{2\ell}\left[V(a)\cdot\lambda\ell + V(b)(-\lambda)\ell\right] = \frac{1}{2}V(a)\cdot\lambda = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}} \,.$$

Man må da altså ha funnet svaret på $V(a)$ i punktet ovenfor.

d) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylinderkoordinater (ingen ϕ og z-avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \frac{b-r}{b-a}\right)\hat{\mathbf{r}} = \underline{V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}} \,.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{V_0}{b-a}\right) = \underline{\frac{\epsilon_0 \, V_0}{r(b-a)}} \,.$$

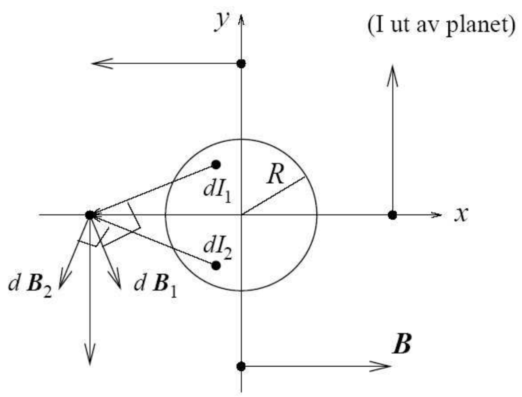
Dette gjelder $r \in [a, b]$. Utenfor er $\rho = 0$.

Oppgave 3. Magnetfelt

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$, og da J varierer med r må vi integrere:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^R J(r)\cdot 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \, J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right)\cdot \mathrm{d}r = 2\pi \, J_0 \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}\frac{R^3}{R}\right) = \underline{\frac{\pi}{3} \, J_0 R^2} \,. \end{aligned}$$

b) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. I Figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene.



I figuren er det også vist hvordan to symmetrisk beliggende "strømelementer" $\mathrm{d}I_1$ og $\mathrm{d}I_2$ tilsammen gir et magnetfelt $\mathrm{d}\vec{B}_1 + \mathrm{d}\vec{B}_2$ på den mellomliggende symmetriaksen (her: x-aksen) med nevnte tangentielle retning. Følgelig må det totale feltet også ha en slik retning. Dette symmetriargumentet vil gjelde like bra både inne i og utenfor lederen, slik at dette blir retningen på $\vec{B}$ overalt.
(Her var det ikke påkrevt med noe symmetriargumentasjon. Fire like lange, tangentielle vektorer i figuren er alt som skal til for å besvare oppgaven.)

c) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\text{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\text{u}}(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r.

Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3} J_0 R^2 ,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_{\text{u}}(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{\pi}{3} J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0 \frac{R^2}{6r}} .$$

d) Inni lederen finner vi

$$\begin{aligned} I(r < R) &= \int_0^r J(r') \cdot 2\pi r' \mathrm{d}r' \\ &= 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}r' = 2\pi J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} \frac{r^3}{R} \right) = \pi J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) . \end{aligned}$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_{u} ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_{\text{i}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \pi J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) = \frac{\mu_0 J_0}{2} r - \frac{\mu_0 J_0}{3R} r^2$$

Altså er

$$C_1 = \underline{\frac{1}{2} \mu_0 J_0} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4\,\mathrm{A/m^2} = \underline{0,0314\,\mathrm{T/m}} .$$

og

$$C_2 = \underline{-\frac{\mu_0 J_0}{3R}} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4\,\mathrm{A/m^2}}{3 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{-2,09\,\mathrm{T/m^2}} .$$

(Enhet: H/m = Tm/A)

Oppgave 4. Kretser

a) I en krets der alle strømmer er konstante (dvs tidsuavhengige), representerer en induktans L rett og slett en kortslutning, mens en kapasitans C representerer en åpen krets. Vi står da essensielt igjen med en seriekobling av 3 motstander R, altså en total motstand $3R$, slik at strømstyrken blir

$$\underline{I = \frac{V_0}{3R} = 0,25\,\mathrm{mA}} .$$

Med induktanser L erstattet av kortslutninger ser vi at det blir null spenningsfall over kondensatorene 3 og 4 slik at $\underline{Q_3 = Q_4 = 0}$. Spenningsfallet over kondensator 1 og 2 blir lik spenningsfallet over de parallelle resistanser:

$$V_1 = I \cdot 2R = 2/3\, V_0 = 1,00\,\mathrm{kV}, \qquad V_2 = I \cdot R = V_0/3 = 0,50\,\mathrm{kV}.$$

Dermed:

$$\underline{Q_1 = C_1 V_1 = 2,0\,\mu\mathrm{C}, \qquad Q_2 = C_2 V_2 = 1,0\,\mu\mathrm{C}.}$$

b) Kirchhoffs strømregel gir

$$I = I_R + I_L .$$

der I er den totale strømmen I, I_R strøm gjennom motstanden og I_L gjennom induktansen. Kirchhoffs spenningsregel på høyre krets gir at den påtrykte spenningen $V(t)$ er lik både spenningen over motstanden og spenningen over induktansen:

$$\begin{aligned} V_0 e^{i\omega t} &= V_R = R I_R \\ V_0 e^{i\omega t} &= V_L = L \frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} e^{i\omega t} \\ I_L &= \frac{V_0}{L} \int e^{i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} . \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = V_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \right) e^{i\omega t}.$$

Strømamplituden er dermed

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \right) = V_0 \left(\frac{1}{R} - i\frac{1}{\omega L} \right)$$

Denne kan skrives på polar form:

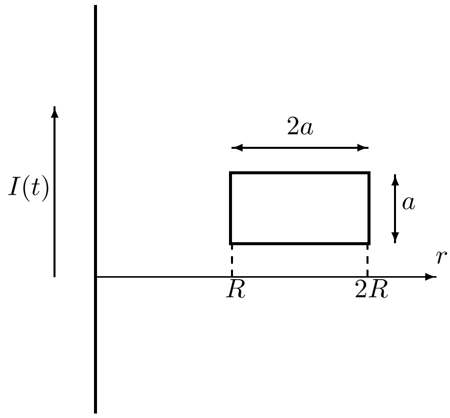
$$I_0 = |I_0| e^{i\alpha}$$

med

$$|I_0| = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2} \right)^{1/2} \qquad \text{og} \quad \alpha = \arctan \frac{\frac{1}{R}}{-\frac{1}{\omega L}} = -\arctan \frac{R}{\omega L}$$

Strømmen er altså faseforskjøvet en vinkel $\arctan \frac{R}{\omega L}$ foran spenningen.

Oppgave 5. Induksjon



Magnetfeltet $B(r,t)$ fra den rette strømførende lederen resulterer i en magnetisk fluks $\Phi_B(t)$ innenfor den rektangulære strømsløyfa. Feltet $B(r)$ avtar med avstand r fra lederens senterakse men er ikke avhengig av z (retning langs leder), slik at vi må integrere med arealelementet $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}r$. Når I er positiv (oppover) har magnetfeltet $\vec{B}$ innenfor strømsløyfa retning normalt ned i papirplanet. Det er naturlig å definere *positiv retning opp* av papirplanet slik at den magnetiske fluksen blir negativ og uttrykt

$$\Phi_B(t) = \int_{\text{rektangel}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\int_R^{2R} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{r}\, a\, \mathrm{d}r = -\frac{\mu_0}{2\pi} I(t)\, a \cdot \ln \frac{2R}{R}$$

Med den oppgitte $I(t)$ finner vi at den induserte ems. i ledersløyfa blir

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\, a \cdot \ln 2 = \frac{\mu_0}{2\pi} (-\omega I_0 \sin \omega t)\, a \cdot \ln 2 = \underline{-\frac{\mu_0}{2\pi} \omega I_0\, a \cdot \ln 2 \cdot \sin \omega t}\,.$$

Med *positiv retning* definert som over blir $\mathcal{E}$ positiv når den gir en indusert strøm mot klokka (høyrehåndsregel, tommel positiv retning opp av papirplanet).

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 11. aug. 2010.