FY1003 Elektr. & magnetisme

Eks. 15. aug. 2011 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	B	E	D	E	C	D	D	B	A	D

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q. Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

b) E. $Q = CV = \epsilon_r\epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

c) D. Begge har potensial $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ på overflata. For kule 1 er all ladning ved dette potensial og $U = \frac{1}{2}V(R)Q$. For kule 2 er ladningen fordelt på gradvis stigende potensial innover i kula, den må derfor ha høyere totalenergi $U = \int_{\text{kule}} \frac{1}{2}V(r)\mathrm{d}q$. Kun C er da mulig svar: A: $1/8 > 1/20$ B: $1/8 > 1/10$ C: $1/8 < 3/20$ D: $1/8 > 3/40$ E: $1/8 = 1/8$. Trenger altså ikke gjøre vidløftige utregninger.

d) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

e) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial(BA\cos\theta)}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = BA\sin\theta\cdot\omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

f) D. Hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{j}}$ parallelt med $\vec{B}$ forblir uendra (Lorentzkrafta $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$) mens hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{i}}$ normalt på $\vec{B}$ gir en sirkelbevegelse med uendra banefart v_0. Ifølge Lorentzkrafta og sentripetalkraft: $qv_0B_0 = m_e v_0^2/r$, som gir $r = m_e v_0/eB_0$. Konstant stigning pluss sirkel er en heliksbevegelse.

g) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

h) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

i) A. Lysstyrke prop. med effekt $P = UI = U^2/R$. Størst spenning gir størst lysstyrke. Når pære 2 skrus ut dobles motstanden i høyre del og spenningen øker. Dermed øker lysstyrken for pære 3. Kan også sette opp uttrykk.

j) D. Strømampl. i L avtar lineært med frekvens: $I_L = V_0/Z_L = V_0/j\omega L$. Strømampl. i C øker lineært med frekvens: $I_C = V_0/Z_C = V_0\cdot i\omega C$. Totalstrømmen i parallellkretsen er $I = I_L + I_C$ og må dermed ha et minimum. Man kan beregne uttrykk for kompleks impedans om man ønsker: $Z = i\omega L//(1/i\omega C) = \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}$. Gir $I = V_0/Z$ min. for $\omega^2 = 1/(LC)$.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ: $\oint \epsilon_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E}\|\mathrm{d}\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r\cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r<a \\ \lambda\ell & r\in[a,b] \\ 0 & r>b \end{cases} \qquad \text{altså kan vi skrive } \vec{E} = \frac{\vec{A}}{r}, \text{ der } \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}} & r\in[a,b] \\ \vec{0} & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = \underline{-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{a}{b}} \quad \left(= |\vec{A}| \cdot \ln\frac{b}{a}\right) ,$$

der vi har integrert radielt slik at $\mathrm{d}\vec{s} = \hat{\mathbf{r}}\ \mathrm{d}r$.

c) Uttrykk for elektrostatisk energitetthet (energi per volum):

$$u = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 .$$

Totalenergien finnes ved å integrere over sylindervolumet mellom $r = a$ og $r = b$ (der $E = A/r \neq 0$), med infinitesimalt sylindervolum $\mathrm{d}\tau = 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell$.

$$U = \int_{\text{syl}} u\,\mathrm{d}\tau = \int_{\text{syl}} \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{A}{r}\right)^2 \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell = \pi\epsilon_0 \ell A^2 \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi\epsilon_0 \ell A^2 \cdot \ln\frac{b}{a} .$$

Per lengdeenhet og innsatt A:

$$U' = \frac{U}{\ell} = \pi\epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{b}{a}} \quad \left(= A^2 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot \ln\frac{b}{a}\right) .$$

[Alternativt kan oppgaven løses ved å integrere over ladning, $U = \int \frac{1}{2}V \cdot \mathrm{d}q$. Det er ladning kun ved flatene $r = a$ og $r = b$, og dessuten er potensialet ved b lik null: $V(b) = 0$, slik at energi per lengdeenhet blir

$$U' = \frac{U}{\ell} = \frac{1}{2\ell}\left[V(a) \cdot \lambda\ell + V(b)(-\lambda)\ell\right] = \frac{1}{2}V(a) \cdot \lambda = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\frac{b}{a}} .$$

Man må da altså ha funnet svaret på $V(a)$ i punktet ovenfor.]

d) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylinderkoordinater (ingen ϕ og z-avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \frac{b-r}{b-a}\right)\hat{\mathbf{r}} = \underline{V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}} .$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{V_0}{b-a}\right) = \underline{\frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}} .$$

Dette gjelder $r \in [a, b]$. Utenfor er $\rho = 0$.

Oppgave 3.

a) Ladning i hver tynne ring er $\mathrm{d}q = \sigma(r) \cdot \mathrm{d}A$ med $\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Totalladning finnes ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$Q = \int_a^b \mathrm{d}q = \int_a^b \sigma(r)\,2\pi r \mathrm{d}r = \int_a^b \sigma_0 \frac{b^2}{r^2} 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi\sigma_0\,b^2 \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \underline{2\pi\sigma_0\,b^2 \ln\frac{b}{a}} .$$

b) I en tynn ring med radius r og bredde $\mathrm{d}r$ går det en strøm $\mathrm{d}I = \mathrm{d}q/T$, der $\mathrm{d}q$ er ladningen som passerer et visst punkt på ringen i en viss tid T. Et fornuftig valg er T lik tida skiva bruker på én omdreining (perioden), dvs. $T = 2\pi/\omega$. For den tynne ringen er $\mathrm{d}q = \sigma(r) \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r$ som i oppgave a). En slik tynn strømring har da strøm

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r}{2\pi/\omega} = \sigma_0 \omega b^2 \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

og omslutter et areal πr^2, slik at dens magnetiske dipolmoment er

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I \cdot \pi r^2 = \sigma_0 \omega b^2 \pi r \mathrm{d}r .$$

Skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$\mu = \int_a^b \mathrm{d}\mu = \int_a^b \sigma_0 \omega b^2 \pi r \mathrm{d}r = \underline{\frac{1}{2}\sigma_0 \omega b^2 \pi (b^2 - a^2)} .$$

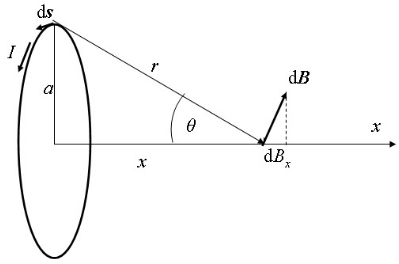
Retningen er normal på strømsløyfa etter høyrehåndsregelen, dvs. $\vec{\mu} = \mu\,\hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z-akse hvis $\sigma_0 > 0$).

[Her har mange bommet ved å bruke $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I\ \mathrm{d}A$, eller også $\mathrm{d}\mu = I\ \mathrm{d}A$; med $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$ og $I = \int_a^b \mathrm{d}I$, som er feil. Arealet som inngår i definisjonen av magnetisk dipolmoment er arealet **innenfor strømsløyfa**, ikke arealet av selve strømsløyfa.]

Oppgave 4.

a) Biot-Savart:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$



med $\mathrm{d}\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $\mathrm{d}\vec{B}$ ha størrelse

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}s}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B \cdot \sin\theta = \mathrm{d}B \cdot a/r\,,$$

mens de andre komponentene blir null når vi integrerer rundt sirkelen. Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir

$$B_x = \oint \mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}s}{r^2} \frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint \mathrm{d}s = 2\pi a$, får vi

$$\vec{B} = B_x \,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi a \frac{a}{r^3} \,\hat{\mathbf{i}} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} \,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

som skulle vises.

b) Fluks gjennom sløyfe B p.g.a. strømmen i sløyfe A:

$$\Phi_{\mathrm{BA}} = B_x(x) \cdot \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_{\mathrm{A}}}{2} \frac{a^2}{r^3} \cdot \pi b^2$$

der vi har brukt oppgitt uttrykk fra a) og $r^3 = \left(x^2 + a^2\right)^{3/2} = \left((0,20)^2 + (0,10)^2\right)^{3/2}\ \mathrm{m}^3 = 0,0119\,\mathrm{m}^3$. Strømmen i A fra $t = 0$ til $t = t_1 = 10$ s kan uttrykkes

$$I_{\mathrm{A}}(t) = I_0 + (I_1 - I_0)\,\frac{t}{t_1}$$

slik at indusert ems. i sløyfe B er gitt ved Faradays lov:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{B}} = -\dot{\Phi}_{\mathrm{BA}} = \frac{\mu_0 \dot{I}_{\mathrm{A}}}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{\mu_0 (I_1 - I_0)/t_1}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2$$

og strømmen blir, innsatt tallverdier:

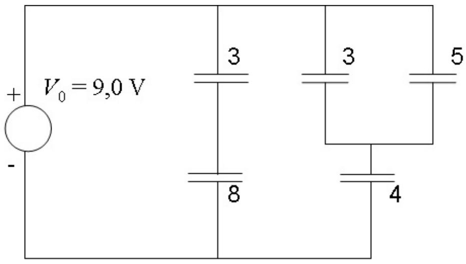
$$I_{\mathrm{B}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{B}}} = \frac{\mu_0 (I_1 - I_0)}{2t_1 \cdot R_{\mathrm{B}}} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{4\,\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 40\,\mathrm{A}}{2 \cdot 10\,\mathrm{s} \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}\,\Omega} \frac{(0,05\,\mathrm{m})^2}{0,0119\,\mathrm{m}^3} \pi (0,02\,\mathrm{m})^2 = 6,64 \cdot 10^{-7}\mathrm{A} = \underline{0,66\,\mu\mathrm{A}}\,.$$

Kontroll av enhet ved hjelp av tabell i Øgrim og Lian:

$$\frac{\mathrm{H/m} \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{s} \cdot \Omega} \cdot \mathrm{m} = \frac{(\mathrm{Vs/A}) \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{V/A}} = \mathrm{A}\,.$$

Fluksen Φ_{B} øker i positiv x-retning, slik at ifølge Lenz' lov vil I_{B} induseres motsatt retning av I_{A}.

Oppgave 5.



Den venstre parallellkretsen med kondensatorene 3 og 8 har ingen betydning for svarene.
a) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Over seriekoplingen 8 og 4 fordeler ladningen seg likt, slik at spenningen er omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4\,\mu\mathrm{F}$, $V_8 = Q/8\,\mu\mathrm{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$ og med $V_4 + V_8 = V_0$ får vi

$$V_4 = V_0 \cdot \frac{2}{3} = \underline{6,00\,\mathrm{V}}.$$

b) Spenningen V_8 over parallellkoplingen 3+5 er de resterende 3,00 V, og spenningen er lik på både 3 og 5-kondensatoren, slik at ladningen på 5-kondensatoren blir

$$Q_5 = C_5 \cdot V_5 = 5,00\,\mu\mathrm{F} \cdot 3,00\,\mathrm{V} = \underline{15,0\,\mu\mathrm{C}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 17. aug. 2011.