FY1003 Elektr. & magnetisme

Eks. 16. aug. 2012 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	B	E	E	B	B	D	C	A	B	B

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q. Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

b) E. For det første peker $\vec{E}$ ut fra en positiv flate som betyr at potensialet avtar utover, og det er en løsning på problemet. Vi må finne ut hvordan $V(z)$ ser ut i nærheten av et uendelig stort uniformt ladd positivt plan. Behandlet i tidligere oppgaver (eller se Ex. 22.7 i Y& F) og funnet at $\vec{E}$ er konstant og lik $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Da må V (for $z > 0$) bli $V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$. Når V_0 er 20 V, så skal vi finne z når $V(z) = 0$. Setter en inn dette får vi $z = 18$ cm.

c) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

d) B. $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$ vil ifølge høyrehåndsregelen ha retning mot venstre i forhold til $\vec{v}$.

e) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

f) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

g) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial (BA\cos\theta)}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

h) A. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A} \cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $B = (1 + \chi_{\mathrm{m}})\mu_0 H \approx \mu_0 H = 8,80\,\mathrm{mT}$.

i) B. Når 3 tas ut blir kretsens totale resistans større (med 3 inne: $2R + 3R//R = 11/4 \cdot R$ og med 3 ute: $5R$). Når resistansen øker, avtar strømmen i kretsen. Strømmen går i sin helhet gjennom 1, slik at lysstyrken ($P = RI^2$) i denne avtar.

j) B. Ved resonans er strømamplityden $|I| = |V|/|Z|$ maksimal, dvs. impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$ minimal med $\omega L = 1/(\omega C)$ og $Z = R$. Den er null kun dersom resistansen $R = 0$.

Oppgave 2.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ: $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\mathrm{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda\ell & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}} & r \in [a,b] \\ \vec{0} & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

b) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylinderkoordinater (fra formelark, ingen ϕ og z-avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \frac{b-r}{b-a}\right)\hat{\mathbf{r}} = \underline{V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}}\,.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater (formelark) får man

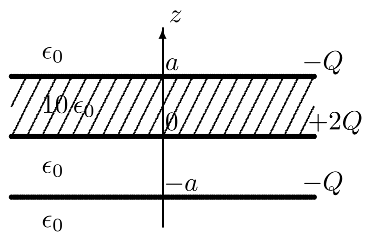
$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{V_0}{b-a}\right) = \underline{\frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}}\,. \quad \text{(gjelder } r \in [a,b]\text{. Utenfor er } \rho = 0)$$

Uten bruk av divergens, kan man bruke Gauss' lov med sylindersymmetri: $\epsilon_0 E(r)\cdot 2\pi r\cdot \ell = Q_{\text{encl}} = \int_a^r \rho(r)\cdot 2\pi r\cdot\ell\cdot \mathrm{d}r\,.$
Forkorter $2\pi\ell$, setter inn $E(r)$ fra a) og deriverer:

$$\epsilon_0 V_0\cdot\frac{1}{b-a}\cdot r = \int_a^r \rho(r)\cdot r\cdot \mathrm{d}r \quad \overset{\text{deriv.}}{\Rightarrow} \quad \epsilon_0 V_0\cdot\frac{1}{b-a} = \rho(r)\cdot r \quad\Rightarrow\quad \rho = \frac{\epsilon_0\, V_0}{r(b-a)}$$

Oppgave 3.

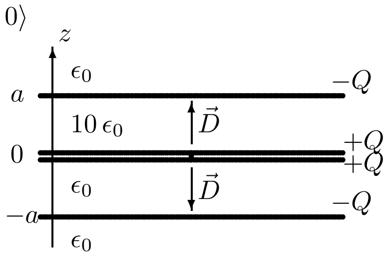
a) Velger å bruke Gauss' lov for $\vec{D}$ med sylindre med akse parallelt med z-aksen og endeflater lik platenes areal A. En lang sylinder som inkluderer alle tre platene har null nettoladning innenfor og derfor null fluks ut. Derfor er $\vec{D}=0$ utenfor platene.



En kort sylinder som omslutter kun plate (0) har nettoladning $2Q$. Flukstettheten $\vec{D}$ er uavhengig av permittiviteten, $\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}A = 2Q$ gir derfor $D = Q/A = \sigma$ til hver side av plate (0). Elektrisk feltstyrke er $\vec{E} = \vec{D}/(\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0)$, slik at svaret blir med $\sigma = Q/A$:

$$\begin{aligned}
\vec{D}=0 \quad &\text{og}\quad \vec{E}=0 &&\text{for}\quad z\notin[-a,a]\\
\vec{D}=\sigma\,\hat{\mathbf{k}}\ \text{og}\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{10\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}} &&\text{for}\quad z\in[0,a\rangle\\
\vec{D}=-\sigma\,\hat{\mathbf{k}}\ \text{og}\ \vec{E} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}} &&\text{for}\quad z\in[-a,0\rangle
\end{aligned}$$

Alternativ: Ladningen på midterste plate vil legge seg med $+Q$ på hver side. Det betyr at platene kan betraktes som to seriekoplede kondensatorer med ladning $Q+Q$ på midtplatene (i motsetning til $Q-Q$ som vanlig for seriekoplede kondensatorer), vist til høyre. Da er det veldig enkelt å se at D-feltet blir som vist over.



b) Vi bruker i det følgende $E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ og $E_2 = \frac{Q}{10\epsilon_0 A}$. Potensialet øker $+E_1 a$ fra (-a) til (0), og avtar $-E_2 a$ fra (0) til (a). Følgelig er

$$\underline{V(0) = E_1 a = \frac{Qa}{\epsilon_0 A}} \quad\text{og}\quad V(a) = [V(a)-V(0)]+V(0) = -E_2\,a + E_1\,a = \underline{\frac{9Qa}{10\epsilon_0 A}}\,,$$

Alternativt mer sirlig med integral:

$$\begin{aligned}
V(0) &= -\int_{-a}^{0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\int_{-a}^{0}(-E_1\,\hat{\mathbf{k}})\cdot \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{k}} = E_1(0-(-a)) = E_1 a\\
V(a) &= [V(a)-V(0)]+V(0) = -\int_0^a E_2\cdot\mathrm{d}z + E_1 a = -E_2 a + E_1 a = -\frac{Q}{10\epsilon_0 A}\,a + \frac{Q}{\epsilon_0 A}\,a = \frac{9}{10}\frac{Qa}{\epsilon_0 A}.
\end{aligned}$$

c) Vi bruker $D_1 = D_2 = Q/A = \sigma$, $\quad E_1 = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$ og $E_2 = \frac{1}{10\epsilon_0}\sigma$. Med homogene felt er energitettheten konstant i hvert mellomrom og lik:

$$\begin{aligned}
\text{mellom (-a) og (0):}\quad u_1 &= \frac{1}{2}D_1\,E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\left(\quad = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2\right).\\
\text{mellom (0) og (a):}\quad u_2 &= \frac{1}{2}D_2\,E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{10\epsilon_0}\left(\quad = \frac{1}{2}\cdot 10\epsilon_0 E_2^2\right).
\end{aligned}$$

Begge mellomrom har volum aA, slik at total energi blir

$$U = \int_{\text{volum}} u\cdot\mathrm{d}\tau = u_1\cdot aA + u_2\cdot aA = \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{10\epsilon_0}\right)\cdot aA = \frac{11}{20}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\cdot aA = \underline{\frac{11}{20}\frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}}\,,$$

eller med E_1 og E_2 dersom ikke funnet svar i a):

$$U = u_1\cdot aA + u_2\cdot aA = \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 10\epsilon_0 E_2^2\right)\cdot aA = \underline{\frac{1}{2}aA\epsilon_0\left(E_1^2 + 10E_2^2\right)}\,.$$

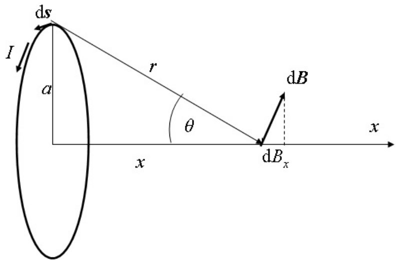
Alternativt beregnet fra formelen $U = \frac{1}{2}\sum qV$ over de tre platene:

$$U = \frac{1}{2}(-Q)\cdot V(-a) + \frac{1}{2}(2Q)\cdot V(0) + \frac{1}{2}(-Q)\cdot V(a) = \frac{1}{2}(-Q)\cdot 0 + \frac{1}{2}(2Q)\frac{Qa}{\epsilon_0 A} + \frac{1}{2}(-Q)\cdot\frac{9}{10}\frac{Qa}{\epsilon_0 A} = \underline{\frac{11}{20}\frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}}\,.$$

Oppgave 4.

a) Biot-Savart:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$



med $\mathrm{d}\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $\mathrm{d}\vec{B}$ ha størrelse

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}s}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cdot\sin\theta = \mathrm{d}B\cdot a/r\,,$$

mens de andre komponentene blir null når vi integrerer rundt sirkelen.
Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir

$$B_x = \oint \mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint \mathrm{d}s = 2\pi a$, får vi det som skulle vises:

$$\vec{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,2\pi a\,\frac{a}{r^3}\,\hat{\mathbf{i}} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

b) Fluks gjennom sløyfe B p.g.a. strømmen i sløyfe A:

$$\Phi_{BA} = B_x(x)\cdot\pi b^2 \;=\; \frac{\mu_0 I_\mathrm{A}}{2}\,\frac{a^2}{r^3}\cdot\pi b^2$$

der vi har brukt oppgitt uttrykk fra a) og $r^3 = \left(x^2+a^2\right)^{3/2} = \left((0,20)^2 + (0,10)^2\right)^{3/2}\ \mathrm{m}^3 = 0,0119\,\mathrm{m}^3$. Strømmen i A fra $t=0$ til $t = t_1 = 10$ s kan uttrykkes

$$I_\mathrm{A}(t) = I_1\frac{t}{t_1}$$

slik at indusert ems. i sløyfe B er gitt ved Faradays lov:

$$\mathcal{E}_\mathrm{B} = -\dot{\Phi}_{BA} = \frac{\mu_0 \dot{I}_\mathrm{A}}{2}\,\frac{a^2}{r^3}\pi b^2 = \frac{\mu_0 I_1/t_1}{2}\,\frac{a^2}{r^3}\pi b^2$$

og strømmen blir, innsatt tallverdier:

$$I_B \;=\; \frac{\mathcal{E}_\mathrm{B}}{R_B} = \frac{\mu_0 I_1}{2t_1\cdot R_B}\,\frac{a^2}{r^3}\pi b^2 = \frac{4\,\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}\cdot 50\,\mathrm{A}}{2\cdot 1,0\,\mathrm{s}\cdot 1,00\cdot 10^{-3}\,\Omega}\,\frac{(0,10\,\mathrm{m})^2}{0,0119\,\mathrm{m}^3}\,\pi(0,02\,\mathrm{m})^2 = 33,18\cdot 10^{-6}\mathrm{A} = \underline{33\,\mu\mathrm{A}}\,.$$

Kontroll av enhet ved hjelp av tabell i Øgrim og Lian:

$$\frac{\mathrm{H/m}\cdot\mathrm{A}}{\mathrm{s}\cdot\Omega}\cdot\mathrm{m} = \frac{(\mathrm{Vs/A})\cdot\mathrm{A}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{V/A}} = \mathrm{A}\,.$$

Retning: Ifølge Lenz' lov: Fluksen Φ_B øker i x-retning, slik at det i sløyfa B induseres strøm som gir B-felt i $-x$-retning, som betyr strømmen må gå motsatt av retningen i sløyfe A.

Oppgave 5.

a) Strømmen og ladningene går i positiv x-retning. Magnetfeltet går i negativ z-retning. Med vektornotasjon, der v_d og B er regnet positive, får vi

$$\vec{v}_\mathrm{d} = v_\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{i}} \quad \text{og} \quad \vec{B} = -B\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Dete gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_\mathrm{B} = q\vec{v}_\mathrm{d}\times\vec{B} = e\cdot v_\mathrm{d}\cdot B\,\hat{\mathbf{i}}\times(-\,\hat{\mathbf{k}}) = ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}} = ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E-felt retning nedover: $\vec{E} = -E\,\hat{\mathbf{j}}$ (vist i figur i oppgaven). Potensialforskjellen $V_\mathrm{H} = E\cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_\mathrm{E} = e\cdot\vec{E} = -eE\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_\mathrm{E} + \vec{F}_\mathrm{B} = -eE\,\hat{\mathbf{j}} + ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}} = \vec{0} \quad\Rightarrow\quad E = v_\mathrm{d}B\,, \quad \text{og altså} \quad \underline{V_\mathrm{H} = E\cdot d = v_\mathrm{d}Bd} \quad \text{(med høyest potensial øverst).}$$

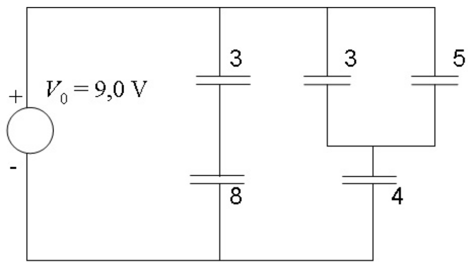
b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_d for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_\mathrm{d}\cdot t\,d \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \frac{I}{n\,q\,t\,d} \quad \left(= \frac{0,15\,\mathrm{A}}{5,0\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 625\,\mathrm{m/s}\right).$$

Fra uttrykk for V_H ser vi at magnetfeltet da er

$$B = \frac{V_\mathrm{H}}{v_\mathrm{d} d} = \frac{V_\mathrm{H}}{I}\cdot n\,q\,t = \frac{6,5\,\mathrm{V}}{0,15\,\mathrm{A}}\cdot 5\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{0,52\,\mathrm{T}}.$$

Oppgave 6.



Den venstre parallellkretsen med kondensatorene 3 og 8 har ingen betydning for svarene.

a) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Over seriekoplingen 8 og 4 fordeler ladningen seg likt, slik at spenningen er omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4\,\mu\mathrm{F}$, $V_8 = Q/8\,\mu\mathrm{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$ og med $V_4 + V_8 = V_0$ får vi

$$V_4 = V_0 \cdot \frac{2}{3} = \underline{6,00\,\mathrm{V}}.$$

b) Spenningen V_8 over parallellkoplingen 3+5 er de resterende 3,00 V, og spenningen er lik på både 3 og 5-kondensatoren, slik at ladningen på 5-kondensatoren blir

$$Q_5 = C_5 \cdot V_5 = 5,00\,\mu\mathrm{F}\cdot 3,00\,\mathrm{V} = \underline{15,0\,\mu\mathrm{C}}.$$

$\mathcal{A.M}$i. 21. aug. 2012.