Eksamen 30. mai 2013. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	k
Rett svar:	B	E	D	A	A	A	B	C	B	A	B	B

Detaljer om spørsmålene:

a) B. $\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right] = -[10, 20, 30]$ V/m, $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{100 + 400 + 900}\,\text{V/m} = 37,4\,\text{V/m}$.

b) E. $\vec{E}$ peker fra høyt potensial (pos.ladning) til lavere potensial (negativ ladning).

c) D. Gauss' lov med gaussflate inne i det metalliske kuleskallet gir at en ladning Q må ligge på indre overflate. Dermed blir det igjen $2Q$ på ytre overflate.

d) A. Feltfritt i ledere og i ladningsfrie hulrom inni ledere, slik at 2 og 3 forkastes. Feltlinjer skal overalt stå normalt på lederoverflater. 1 er OK.

e) A. $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ gir $[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}}$. Eller Angell & Lian s. 12: $\text{T} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{A}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \cdot \text{C/s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}}$.

f) A. Når magneten nærmer seg strømsløyfa øker magnetfluksen nedover inni sløyfa. Ifølge Lenz' lov settes opp en strøm som motvirker økningen, og ifølge høyrehåndsregelen må strømmen gå i positiv retning gitt i figuren. Når magneten er midt i øker ikke fluksen lenger, for deretter å avta. Da blir strømretningen motsatt. Altså figur 1 rett.

g) B. Med krysset el. og magn. felt virker elektrisk og magnetisk kraft i motsatt retning. Når det akkurat ikke er avbøyning er Lorentzkrafta $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$. Altså $v = E/B$ gjelder for alle partikler, altså må de ha samme fart.

h) C. $m = AI = 0,10\,\text{m} \cdot 0,20\,\text{m} \cdot 5,00\,\text{A} = 0,10\,\text{Am}^2$.

i) B.

j) A. $B = \mu H = (1 + \chi)H$ der χ er magn. susceptibilitet. Når B faller med $0,005\,\%$ når I og dermed H er konstant, er $\chi = -0,005\% = -5 \cdot 10^{-5}$.

k) B. Når 3 tas ut blir den tilhørende greina åpen krets, og kretsens totale resistans blir større (med 3 inne: $2R + 3R//R = 11/4 \cdot R$ og med 3 ute: $5R$). Når resistansen øker, avtar strømmen i kretsen. Strømmen går i sin helhet gjennom 1, slik at lysstyrken ($P = RI^2$) i denne avtar.

l) B. Ved resonans er strømamplituden $|I| = |V|/|Z|$ maksimal, dvs. impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$ minimal med $\omega L = 1/(\omega C)$ og $Z = R$. Den er null kun dersom resistansen $R = 0$.

Oppgave 2. Metallkuler

a) All ladning er ved samme potensial $V(R_1) = V_1$, slik at elektrostatisk energi er (f.eks. fra formelark)

$$U_1 = \frac{1}{2}V(R_1)Q = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}}.$$

b) Når metallkulene forbindes med ledertråd blir de elektrostatisk sett som ett metallisk legeme som må ha samme potensial overalt. I tillegg er ladningen bevart: $Q = Q_2 + Q_1$. Med potensialet V_1' og V_2' på henholdsvis kule 1 og 2 blir

$$V_1' = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \equiv V_2' = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q - Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

(Hverken overflateladning σ eller elektrisk felt, E, på overflata er like på kulene, heller ikke fordeles ladningene med like mye på hver).

Dette gir

$$Q_1 R_2 = (Q - Q_1)R_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q_1 = Q\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{og} \quad \underline{Q_2 = Q - Q_1 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2}},$$

og potensialene blir

$$V_1' = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}} \qquad V_2' = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}}$$

og er like som de skulle være.

c) Energien før sammenkopling med all ladning på kule 1 er U_1 som over. Etter sammenkopling er all ladning på et lavere potensial V_1', og sluttenergien blir

$$U' = \frac{1}{2}V_1'Q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}.$$

Relativt energitap

$$x = \frac{U_1 - U'}{U_1} = 1 - \frac{U'}{U_1} = 1 - \frac{R_1}{R_1+R_2} = \underline{\frac{R_2}{R_1+R_2}}.$$

Dette energitapet er lik varmetapet pga. strømmen i forbindelsesledningen. Merk at hvis $R_1 = R_2$ er $x = \frac{1}{2}$ og hvis $R_2 \gg R_1$ er $x = 1$, dvs. tilnærmet all energi tapes. (Ikke krevd til eksamen: Noe av energien tapes også som el.magn. stråling. Hvis resistans $R = 0$ i ledningen tapes akkurat samme mengde energi, men da alt som stråling.)

Kan med mer regning finne sluttenergien som en sum:

$$U' = U_1' + U_2' = \frac{1}{2}V_1'Q_1 + \frac{1}{2}V_2'Q_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_1}{(R_1+R_2)^2} + \frac{R_2}{(R_1+R_2)^2}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{R_1+R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}.$$

Oppgave 3. Elektrostatikk.

Merk at her er $Q(r) = Q_{\text{enc}}$ innenfor kuleflate oppgitt direkte, som nok forvirret enkelte under eksamen. Oppgaven er dermed lettere enn om f.eks. ladningstettheten $\rho(r)$ var oppgitt. Romladningen er positiv innerst i kula, deretter negativ for å summere til $Q(a) = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0$, for hele kula med radius a.

a) Bruker Gauss' lov med Gaussflate lik kuleflate med radius r.

$$\int_{\mathrm{S}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_r\epsilon_0}Q(r).$$

Kuleflata har areal $4\pi r^2$ og ladning innenfor flata er som oppgitt $Q(r)$. Kulesymmetri tilsier at $\vec{E}$ er radielt retta, kun avhengig av r og dermed har lik verdi $|\vec{E}|$ over heile kuleskallet. Inni kula blir derfor

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{Q(r)}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0(1-\frac{r}{a})}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \underline{\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r\left(1-\frac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}}}\,.$$

Fordi totalladning i kula er null: $Q(a) = 0$, må ifølge Gauss lov (Gaussflate med kuleskall $r > a$) $\underline{\vec{E} = \vec{0}}$ utenfor kula.

b) Enten bruk av en av Maxwellikningene med divergens for kulekoordinater (på formelark, kun r-avhengighet):

$$\rho(r) = \epsilon_r\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(r) = 2\epsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E(r)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\rho_0}{3}r\left(1-\frac{r}{a}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\rho_0}{3}\left(3r^2 - 4\frac{r^3}{a}\right) = \underline{\rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)}.$$

Eller fra definisjonen ρ = ladning/volum = $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\tau$, der infinitesimalt volum $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\left(1-\frac{r}{a}\right)\right) = \frac{1}{3r^2}\rho_0\left(3r^2 - 4\frac{r^3}{a}\right) = \underline{\rho_0\left(1-\frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)}.$$

Eller nesten identisk med forrige:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}Q/\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}r} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho_0\left(3r^2 - 4\frac{r^3}{a}\right)}{4\pi r^2} = \underline{\rho_0\left(1-\frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)}.$$

Oppgave 4. Kondensator.

a) Kapasitansen vil være som om vi hadde kondensator 1 i parallell med en seriekobling av kondensatorene 2 og 3, altså tre diskrete kondensatorer koblet sammen. Dette fordi vi uten å endre elektrostatiske forhold kan splitte kondensatorene mellom 1 og (2+3) og vi kan splitte mellom 2 og 3 ved å legge inn ei metallplate eller to metallplater forbundet med ledning. Merk også at det er *relative* permittiviteter som er oppgitt, slik at vi må multiplisere med

ϵ_0, som mange har glemt ved eksamen.

$$C_1 = \epsilon_1\epsilon_0 \frac{A/2}{d} = \epsilon_1\epsilon_0 \frac{A}{2d}, \qquad C_2 = \epsilon_2\epsilon_0 \frac{A/2}{d/2} = \epsilon_2\epsilon_0 \frac{A}{d}, \qquad C_3 = \epsilon_3\epsilon_0 \frac{A/2}{d/2} = \epsilon_3\epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Seriekoblingen av kondensatorene 2 og 3 gir:

$$C_\mathrm{s} = \frac{C_2\,C_3}{C_2 + C_3} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}\,\frac{A}{d}$$

og total kapasitans blir

$$C = C_1 + C_\mathrm{s} = \epsilon_1\epsilon_0 \frac{A}{2d} + \epsilon_0 \frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}\,\frac{A}{d} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}\right)\frac{A}{d}$$

med tallverdi

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4,9 + \frac{5,6 \cdot 2,1}{5,6 + 2,1}\right) \frac{10,00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 1,761 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} = \underline{17,6\,\mathrm{pF}}\,.$$

Eventuelt utregnet med tallverdier for hver del av kondensatoren:

$$C_1 = \epsilon_1\epsilon_0 \frac{A}{2d} = 10,85\,\mathrm{pF}, \quad C_2 = \epsilon_2\epsilon_0 \frac{A}{d} = 24,79\,\mathrm{pF}, \quad C_3 = \epsilon_3\epsilon_0 \frac{A}{d} = 9,30\,\mathrm{pF}$$

$$C_\mathrm{s} = \frac{C_2\,C_3}{C_2 + C_3} = 6,763\,\mathrm{pF} \quad \underline{C = C_1 + C_\mathrm{s} = 17,61\,\mathrm{pF}.}$$

b) Potensialforskjellen $V = 200$ V er lik over materiale 1 og over materiale 2+3. I materiale 1 faller potensialet jamt mellom platene, mens i seriekoplingen 2+3 faller potensialet mer (størst E) gjennom materialet med lavest ϵ_r. Dette fordi elektrisk flukstetthet $D_2 = D_3$ er likt gjennom begge materialene 2 og 3 og

$$D_2 = \epsilon_2\epsilon_0 E_2 = D_3 = \epsilon_3\epsilon_0 E_3.$$

Totalt spenningsfall er

$$|V| = \int_{2+3} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E_2 \cdot \frac{d}{2} + E_3 \cdot \frac{d}{2}$$

som gir

$$|V| = \frac{D_2}{\epsilon_2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2} + \frac{D_2}{\epsilon_3\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2} = D_2 \frac{d/2}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_3}\right) \quad \Rightarrow \quad D_2 = \frac{\epsilon_0\,V}{d/2} \cdot \frac{\epsilon_2\,\epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}$$

og endelig

$$E_3 = \frac{D_2}{\epsilon_3\,\epsilon_0} = \frac{V}{d/2}\,\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3} = \frac{200\,\mathrm{V}}{1,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{5,6}{5,6 + 2,1} = 145,46\,\mathrm{kV/m} = \underline{145\,\mathrm{kV/m}}\,.$$

Det er mange alternative beregningsmåter, f.eks. ved å beregne ladningen på del (2+3) på kondensatoren: $Q_\mathrm{s} = C_\mathrm{s}V = 6,763\,\mathrm{pF} \cdot 200\,\mathrm{V} = 1,35\,\mathrm{nC}$, og derfra $E_3 = \frac{\sigma_3}{\epsilon_3\epsilon_0} = \frac{Q_\mathrm{s}}{A/2 \cdot \epsilon_3\epsilon_0} = 145\,\mathrm{kV/m}$. Eller ved å gå veien å beregne $V_3 = \frac{Q_\mathrm{s}}{C_3} = 145,2\,\mathrm{V}$ og derfra $E_3 = \frac{V_3}{d/2} = 145\,\mathrm{kV}$.

Merk at ladningen for 2 og 3 er like: $Q_2 = Q_3 = Q_\mathrm{s}$ (når vi tenker 2 og 3 spaltet opp med metallplate) og dermed er flukstettheten $D_2 = D_3$ som argumentert over, men $Q_1 \neq Q_\mathrm{s}$ og derfor er $D_1 \neq D_\mathrm{s}$.

Oppgave 5. Magnetisk kraft.

a) Ifølge Amperes lov er B-feltet fra ledning 1 ved ledning 2 i avstand a asimutalt retta, i dette tilfellet i x-retning:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{a}\,\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Dette gir ei kraft på strømelement $I_2\mathrm{d}\vec{s} = I_2\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{k}}$ i ledning 2 lik

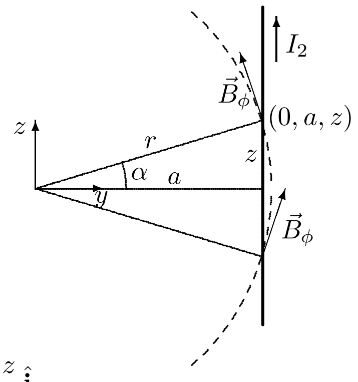
$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}_1 = I_2\mathrm{d}zB_1\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Krafta er frastøtende (retning $\hat{\mathbf{j}}$) og kraft per lengdeenhet blir

$$\underline{F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu_0}{2\pi}I_1I_2\frac{1}{a}}.$$

b) I figuren til høyre ser vi inn mot x-retningen, dvs. strøm I_1 rett opp av papirplanet i origo. B-felt i avstand r fra ledning 1 (dvs. ved posisjon $(0, a, z)$) er lik

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r} \qquad \text{med } r = \sqrt{a^2 + z^2}$$



og vil ligge i yz-planet (= papirplanet). Krafta ved posisjon $(0, a, z)$ er

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}$$

og vil peke i positiv x-retning når $z > 0$ og i negativ x-retning når $z < 0$ (h.h.regelen). Vinkelen mellom $I_2\,\mathrm{d}\vec{s}$ og $\vec{B}$ er lik α, vinkelen i trekanten med sider a, z, r med $\sin\alpha = \frac{z}{r}$ (med fortegn). Derfor blir

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B} = I_2\,\mathrm{d}z B_\phi \cdot \sin\alpha\,\hat{\mathbf{i}} = I_2\,\mathrm{d}z\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r} \cdot \frac{z}{r}\,\hat{\mathbf{i}}$$

og kraft per lengdeenhet

$$\underline{\vec{F}' = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1\, I_2 \frac{z}{a^2 + z^2}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

Krafta er altså i positiv x-retning for $z > 0$ og negativ x-retning for $z < 0$.

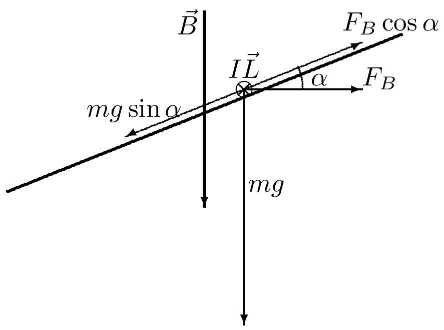
Oppgave 6. Induksjon.

a) Lenz' lov: Når staven beveger seg nedover avtar fluksen Φ_B nedover. Som kompensasjon gir indusert strøm en fluks nedover, og etter h.h.regel må strømmen gå med klokka sett ovenfra, dvs fra a til b.
Eller argumentasjon med kraft: Det induseres en strøm som gir en kraft $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ som virker mot bevegelsen, dvs. med komponent oppover skråplanet. Da må strømmen gå fra a til b ifølge h.h.regelen.

b) Indusert strøm er gitt av Faradays lov:

$$|\mathcal{E}| = \dot{\Phi}_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right) = B\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\cos\alpha = BL\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\cos\alpha = BLv\cos\alpha. \qquad \Rightarrow \qquad \underline{I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv\cos\alpha}{R}}.$$

Der $A(t)$ er arealet for den sluttede kretsen som staven former med skinnene, α er vinkelen mellom arealnormalvektor og $\vec{B}$ og s er stavens posisjon fra horisontalplanet, målt langs skinnene.



c) Lorenzkrafta pga. strømmen I og B trekker staven horisontalt mot høyre: $F_B = ILB$, med komponent langs skråplanet: $F_{\mathrm{opp}} = ILB\cos\alpha$. Gravitasjonen trekker staven nedover: med komponent $F_{\mathrm{ned}} = mg\sin\alpha$. Ved stasjonære forhold (konstant fart) er ifølge Newton 1 disse krefter like:

$$mg\sin\alpha = ILB\cos\alpha = \frac{B^2L^2v\cos^2\alpha}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v = \frac{Rmg\sin\alpha}{B^2L^2\cos^2\alpha}}.$$

Oppgave 7. Gjensidig induktans.

Magnetisk fluks inni den lange, tynne solenoiden er

$$\Phi_B = BA = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\frac{N_1}{\ell_1}I_1\,\pi r_1^2.$$

Vi antar at $B = 0$ utenfor den indre solenoiden, slik at den omsluttende solenoide 2 opplever denne magnetiske fluksen Φ_B pga. den indre solenoiden. Evt. tidsendring i Φ_B induserer en ems. i solenoide 2 ifølge Faradays lov:

$$\mathcal{E}_{21} = -N_2\,\dot{\Phi}_B = -N_2\,\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\frac{N_1}{\ell_1}\dot{I}_1\,\pi r_1^2,$$

idet det er kun I_1 som kan variere med tida. Gjensidig induktans M er definert ved $\mathcal{E}_{21} = -M\dot{I}_1$, slik at

$$M = N_2\frac{N_1}{\ell_1}\,\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\,\pi r_1^2 = 300 \cdot \frac{500}{0,10\,\mathrm{m}}2400 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot \pi(0,010\,\mathrm{m})^2 = 1,421\mathrm{H} = \underline{1,42\,\mathrm{H}}.$$

Så lenge vi antar $B = 0$ utenfor (den indre) solenoiden, er radien til ytre solenoide uten betydning. Men i praksis vil M avta jo større r_2 er, fordi solenoide 2 vil få mer og mer B-felt i motsatt retning av B-feltet inni solenoide 1. Lengden til solenoide 2 har heller ingen betydning så lenge endene ligger innenfor endene til solenoide 1.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 6. juni 13.