FY1003 Elektr. & magnetisme
Eks. 9. aug. 2013 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	E	E	D	E	B	D	A	B

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) E. $Q = CV = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

b) E. For det første peker $\vec{E}$ ut fra en positiv flate som betyr at potensialet avtar utover, og det er en løsning på problemet. Vi må finne ut hvordan $V(z)$ ser ut i nærheten av et uendelig stort uniformt ladd positivt plan. Behandlet i tidligere oppgaver (eller se Ex. 22.7 i Y& F) og funnet at $\vec{E}$ er konstant og lik $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Da må V (for $z > 0$) bli $V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$. Når V_0 er 20 V, så skal vi finne z når $V(z) = 0$. Setter en inn dette får vi $z = 18$ cm.

c) D. Begge har potensial $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ på overflata. For kule 1 er all ladning ved dette potensial og $U_1 = \frac{1}{2}V(R)Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$, som oppgitt. For kule 2 er ladningen fordelt på gradvis stigende potensial $V(r)$ innover i kula, den må derfor ha høyere totalenergi $U_2 = \int_{\text{kule}} \frac{1}{2}V(r)\mathrm{d}q > \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$. Alle alternative uttrykk inneholder $\frac{Q^2}{R}$, og vi ser at det er kun alternativet D som har $U_2 > U_1$: $3/20 > 1/8$. Trenger altså ikke gjøre vidløftige utregninger.

d) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

e) B. $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$ vil ifølge høyrehåndsregelen ha retning mot venstre i forhold til $\vec{v}$.

f) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

g) A. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A} \cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $B = (1 + \chi_\mathrm{m})\mu_0 H \approx \mu_0 H = 8,80\,\mathrm{mT}$.

h) B. Strømampl. $|I| = |V|/|Z|$ der impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$. Pga. leddet $i\omega L$ (og altså induktansen) får Z svært stor verdi og strømamplituden veldig liten verdi når $\omega \to \infty$.

Oppgave 2.

a) Et metall har en stor mengde valenselektroner som kan bevege seg tilnærmet fritt i metallet. Eventuelle overskuddselektroner beveger seg også helt fritt. En absolutt krav er at E-feltet inni metallet alltid er null. Hadde $E \neq 0$ ville overskuddsladningene flyttet seg inntil $E = 0$ igjen. Vi kan legge ei Gaussflate inni metallet, da $E = 0$ overalt må volumet innenfor Gaussflata ha null ladning. Gaussflata kan legges vilkårlig, så da må det være ladningsfritt overalt inni lederen, ladninger må legge seg på overflata. En annen måte å se det på er at overskuddsladninger vil frastøtes hverandre og går så langt unna som mulig. For ei kule blir det på overflata.

Pga. symmetri må ladningen fordele seg jamt over heile overflata. Eller mer detaljert argumentert: Dersom ladningen var ujamt fordelt ville det bli et tangentialt $E_{||}$-felt på overflata. Overflateladningene vil da flytte seg inntil $E_{||}$ blir null overalt.

b) Potensial $V(r)$ (relativt $V(\infty) = 0$) fra definisjonen, med $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}}$. Først for $r \geq R_1$:

$$V(r \geq R_1) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}.$$

Inni metallet er $\vec{E} = \vec{0}$ og ifølge definisjonen derfor ingen endring i potensialet:

$$V(r < R_1) = V(R_1) = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}}.$$

Elektrostatisk energi enklest fra

$$U = \frac{1}{2}\int_Q V\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}V(R_1)Q = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}},$$

siden all ladning er samla på potensial $V(R_1) = V_1$.

c) Vi bruker $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Når ladningen Q fordeler seg på henholdsvis kule 1 og 2 med Q_1 og $Q_2 = Q_1 - Q$ blir sluttenergien

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{2}k\frac{Q_2^2}{R_2} \; = \; \frac{1}{2}k\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{2}k\frac{(Q-Q_1)^2}{R_2}.$$

Minimum energi som funksjon av Q_1 når deriverte mhp. Q_1 er lik null:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}Q_1} = \frac{1}{2}k\left(\frac{2Q_1}{R_1} + \frac{2(Q-Q_1)\cdot(-1)}{R_2}\right) = k\left(\frac{Q_1R_2 - (Q-Q_1)R_1}{R_1R_2}\right) \equiv 0$$

som gir

$$Q_1R_2 = (Q-Q_1)R_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Q_1 = Q\frac{R_1}{R_1+R_2}} \qquad \text{og} \quad \underline{Q_2 = Q - Q_1 = Q\frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

d) Potensial på ei lederkule har vi uttrykk for i pkt. b), og for kule 1 og 2 gir dette henholdsvis:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)} \qquad \text{og} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1+R_2)}$$

$V_1 = V_2$ slik at spenningen mellom dem er null. Ladningen fordeler seg som om metallkulene var forbundet med en metalltråd.

Oppgave 3.

a) Beregner først elektrisk flukstetthet $\vec{D}$, siden denne er uavhengig av dielektrisk materiale: Gauss lov $\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{encl}}$ gir mellom kuleskallene, $r \in [a,c]$ er $Q_{\text{encl}} = Q$, som gir, idet vi har kulesymmetri:

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\ .$$

Ellers i rommet er $Q_{\text{encl}} = 0$ for Gaussflata slik at $\vec{D} = 0$ for $r \notin [a,c]$.

Dette gir

$$\vec{E}(r) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [a,b] \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [b,c] \\ \vec{0} & \Leftarrow r \notin [a,c]. \end{cases}$$

b)

$$V(a) - V(c) = -\int_c^a \vec{E}(r)\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_c^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right)}$$

el.l. uttrykk.

c) For alle $r \in [a,b]$ er

$$\vec{P}(r) = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0\frac{\vec{D}}{\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\right)\vec{D} = \underline{\frac{\epsilon_{\mathrm{r}}-1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}}\,.$$

For alle andre r er $\underline{\vec{P} = \vec{0}}$.

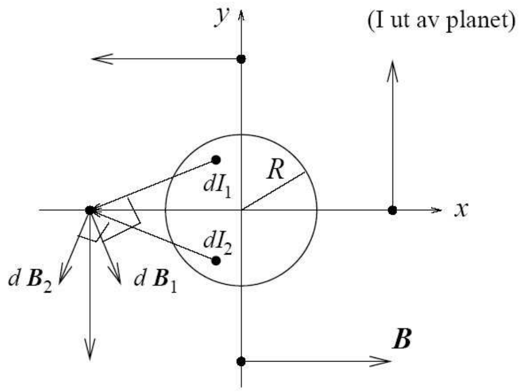
Polariseringsvektor $\vec{P}$ peker i samme retning som $\vec{D}$ og $\vec{E}$, dvs. utover. Retningen er fra negativ til positiv overflateladning, dvs. det er negativ indusert overflateladning i dielektrikumet ved $r = a$.

Oppgave 4.

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r$, og da J varierer med r må vi integrere:

$$\begin{aligned} I_0 \quad &= \quad \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \int_0^R J(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \\ &= \quad 2\pi\,J_0\int_0^R\left(r - \frac{r^2}{R}\right)\cdot\mathrm{d}r = 2\pi\,J_0\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}\frac{R^3}{R}\right) = \underline{\frac{\pi}{3}\,J_0R^2}\,. \end{aligned}$$

b) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. I Figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene.



I figuren er det også vist hvordan to symmetrisk beliggende "strømelementer" $\mathrm{d}I_1$ og $\mathrm{d}I_2$ tilsammen gir et magnetfelt $\mathrm{d}\vec{B}_1 + \mathrm{d}\vec{B}_2$ på den mellomliggende symmetriaksen (her: x-aksen) med nevnte tangentielle retning. Følgelig må det totale feltet også ha en slik retning. Dette symmetriargumentet vil gjelde like bra både inne i og utenfor lederen, slik at dette blir retningen på $\vec{B}$ overalt. (Her var det ikke påkrevt med noe symmetriargumentasjon. Fire like lange, tangentielle vektorer i figuren er alt som skal til for å besvare oppgaven.)

c) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\mathrm{u}}(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r.

Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3} J_0 R^2 \,,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_{\mathrm{u}}(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{\pi}{3} J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0 \frac{R^2}{6r}} \,.$$

d) Inni lederen finner vi

$$\begin{aligned} I(r < R) &= \int_0^r J(r') \cdot 2\pi r' \mathrm{d}r' \\ &= 2\pi\, J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}r' = 2\pi\, J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} \frac{r^3}{R} \right) = \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) . \end{aligned}$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_{u} ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_{\mathrm{i}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} r - \frac{\mu_0\, J_0}{3R} r^2$$

Altså er

$$\underline{C_1 = \frac{1}{2} \mu_0\, J_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{C_2 = -\frac{\mu_0\, J_0}{3R}}$$

Oppgave 5.

a) Strømmen og ladningene går i positiv x-retning. Magnetfeltet går i negativ z-retning. Med vektornotasjon, der v_{d} og B er regnet positive, får vi

$$\vec{v}_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d}}\, \hat{\mathbf{i}} \;\; \text{og} \;\; \vec{B} = -B\, \hat{\mathbf{k}} \,.$$

Dette gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = q\vec{v}_{\mathrm{d}} \times \vec{B} = e \cdot v_{\mathrm{d}} \cdot B\, \hat{\mathbf{i}} \times (-\,\hat{\mathbf{k}}\,) = e v_{\mathrm{d}} B\, \hat{\mathbf{j}} \,.$$

Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E-felt retning nedover: $\vec{E} = -E\,\hat{\mathbf{j}}$ (vist i figur i oppgaven). Potensialforskjellen $V_{\mathrm{H}} = E \cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_{\mathrm{E}} = e \cdot \vec{E} = -eE\,\hat{\mathbf{j}} \,.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_{\mathrm{E}} + \vec{F}_{\mathrm{B}} = -eE\,\hat{\mathbf{j}} + e v_{\mathrm{d}} B\,\hat{\mathbf{j}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E = v_{\mathrm{d}} B \,, \quad \text{og altså} \quad \underline{V_{\mathrm{H}} = E \cdot d = v_{\mathrm{d}} B d} \quad \text{(med høyest potensial øverst).}$$

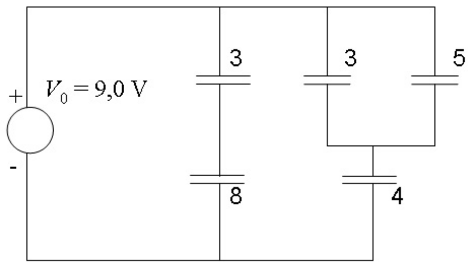
b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_d for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_\mathrm{d}\cdot t\,d \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \frac{I}{n\,q\,t\,d} \quad \left(= \frac{0,15\,\mathrm{A}}{5,0\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 625\,\mathrm{m/s}\right).$$

Fra uttrykk for V_H ser vi at magnetfeltet da er

$$B = \frac{V_\mathrm{H}}{v_\mathrm{d} d} = \frac{V_\mathrm{H}}{I}\cdot n\,q\,t = \frac{6,5\,\mathrm{V}}{0,15\,\mathrm{A}}\cdot 5\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{0,52\,\mathrm{T}}.$$

Oppgave 6.



Den venstre parallellkretsen med kondensatorene 3 og 8 har ingen betydning for svarene.

a) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Spenningen over hver av 3 og 5 er like, $V_3 = V_5 \equiv V_8$. Over den høyre seriekoplingen 8 og 4 fordeler ladningen seg likt, slik at spenningen er omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4\,\mu\mathrm{F}$, $V_8 = Q/8\,\mu\mathrm{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$ og med $V_4 + V_8 = V_0$ får vi

$$V_5 = V_8 = V_0\cdot\frac{1}{3} = \underline{3,00\,\mathrm{V}}.$$

b) Spenningen V_4 er de resterende 9,00 V - 3,00 V = 6,00 V, slik at ladningen på 4-kondensatoren blir

$$Q_4 = C_4\cdot V_4 = 4,00\,\mu\mathrm{F}\cdot 6,00\,\mathrm{V} = \underline{24,0\,\mu\mathrm{C}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 16. juli 2013.