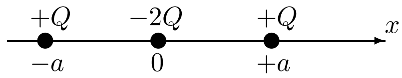
Eks. 13. aug. 2014 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g
Rett svar:	B	E	D	E	B	D	C

Oppgave 2. Punktladninger



a) Elektrisk felt på x-aksen for én punktladning i $x = 0$ er $\vec{E}(x) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} = k\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}}$. For disse tre punktladninger når $x > a$:

$$\underline{\vec{E}(x) = k\left(\frac{Q}{(x+a)^2} + \frac{-2Q}{x^2} + \frac{Q}{(x-a)^2}\right)\hat{\mathbf{i}}} \tag{1}$$

evt. sammenfattet til én brøk:

$$\begin{aligned} E(x) &= kQ\frac{x^2(x-a)^2 - 2(x+a)^2(x-a)^2 + (x+a)^2x^2}{x^2(x+a)^2(x-a)^2} \\ &= kQ\frac{x^4 - 2x^3a + x^2a^2 - 2(x^4 - 2x^2a^2 + a^4) + x^4 + 2x^3a + x^2a^2}{x^2(x^2-a^2)^2} \\ &= kQ\frac{6x^2a^2 - 2a^4}{x^2(x^2-a^2)^2} = \underline{kQ\frac{2a^2(3x^2-a^2)}{x^2(x^2-a^2)^2}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Enkleste beregning å summere energi parvis over ladningene og bruke oppgitt $V(r)$ for punktladning. Potensialet (energi per ladning) i $x = 0$ fra ladningen Q i $x = -a$ er kQ/a, slik at energien mellom de to ladningene i $x = -a$ og $x = 0$ er $U = k\frac{Q\,(-2Q)}{a}$, osv. som gir

$$U = k\left(\frac{Q\,(-2Q)}{a} + \frac{Q\,Q}{2a} + \frac{(-2Q)\,Q}{a}\right) = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

c) Når $x \gg a$ vil vi fra uttrykket (2) få

$$\vec{E}(x \gg a) \approx kQ\,\frac{2a^2\cdot 3x^2}{x^6}\,\hat{\mathbf{i}} = \underline{kQ\,\frac{6a^2}{x^4}\,\hat{\mathbf{i}}},$$

Altså <u>konstanten $c = 6a^2$ og eksponenten $n = 4$</u>.

Dersom du bruker uttrykket (1) må du skrive litt om:

$$E(x) = k\left(\frac{Q}{(x+a)^2} + \frac{-2Q}{x^2} + \frac{Q}{(x-a)^2}\right) = k\frac{Q}{x^2}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-2} - 2 + \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-2}\right]$$

og bruke approksomasjonen som er oppgitt med $y = a/x \ll 1$:

$$\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^{-2} \approx 1 \mp 2\frac{a}{x} + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2$$

som gir

$$E(x) \approx k\frac{Q}{x^2}\left[1 - 2\frac{a}{x} + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 2 + 1 + 2\frac{a}{x} + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2\right] = k\frac{Q}{x^2}\left[6\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]$$

Oppgave 3.

a) Beregner først elektrisk flukstetthet $\vec{D}$, siden denne er uavhengig av dielektrisk materiale:
Gauss lov gir $\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ mellom kuleskallene og $\vec{D} = \vec{0}$ for $r \notin [a, 3a]$.

Dette gir

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_{\rm r}\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [a, 2a] \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [2a, 3a] \\ \vec{0} & \Leftarrow r \notin [a, 3a]. \end{cases}$$

b)

$$V(a) - V(3a) = -\int_{3a}^{a} \vec{E}(r)\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_{3a}^{2a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_{\rm r}}\int_{2a}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{\epsilon_{\rm r}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right)\right)$$
$$= \underline{\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon_{\rm r}}\right)}$$

c) For alle $r \in [a, 2a]$ er

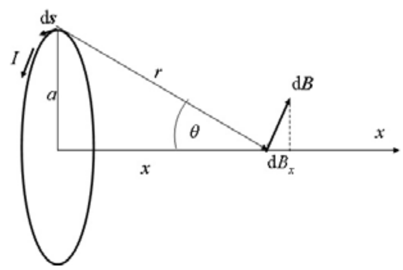
$$\vec{P}(r) = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0\frac{\vec{D}}{\epsilon_{\rm r}\epsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\rm r}}\right)\vec{D} = \underline{\frac{\epsilon_{\rm r} - 1}{\epsilon_{\rm r}}\,\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}}\,.$$

For alle $r \notin [a, 2a]$ er $\underline{\vec{P} = \vec{0}}$. Polariseringsvektor $\vec{P}$ peker i samme retning som $\vec{D}$ og $\vec{E}$, dvs. utover.

Oppgave 4.

a) Biot-Savart:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$



med $\mathrm{d}\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $\mathrm{d}\vec{B}$ ha størrelse

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}s}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B \cdot \sin\theta = \mathrm{d}B \cdot a/r\,.$$

Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir $B_y = 0$, $B_z = 0$ og

$$B_x = \oint \mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint \mathrm{d}s = 2\pi a$, får vi det som skulle vises:

$$\vec{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,2\pi a\,\frac{a}{r^3}\,\hat{\mathbf{i}} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{a^2}{r^3}\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

b) Fluks gjennom sløyfe B p.g.a. strømmen i sløyfe A:

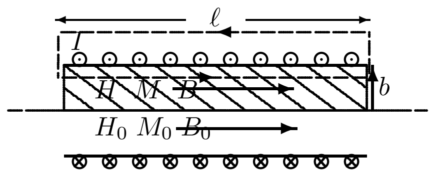
$$\Phi_{BA} = B_x(x) \cdot \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_{\rm A}}{2}\,\frac{a^2}{r^3} \cdot \pi b^2$$

der vi har brukt oppgitt uttrykk fra a). Strømmen i A fra $t = 0$ til $t = t_1 = 10$ s kan uttrykkes $I_{\rm A}(t) = I_1\,t/t_1$ dvs. $\dot{I}_{\rm A}(t) = I_1/t_1$. Da blir strømmen i sløyfa B fra Faradays lov:

$$I_B = \frac{\mathcal{E}_{\rm B}}{R_B} = \frac{\dot{\Phi}_{BA}}{R_B} = \frac{\mu_0\dot{I}_{\rm A}}{2}\,\frac{a^2}{r^3}\pi b^2\,\frac{1}{R_B} = \underline{\frac{\mu_0 I_1}{2t_1 \cdot R_B}\,\frac{a^2}{r^3}\pi b^2}\,.$$

Oppgave 5. Magnetisk materiale.

a) Legger en Amperekurve som et rektangel med en sidekant (lengde ℓ) inni solenoiden og resten utenfor. Utenfor solenoiden tilnærmes $H = 0$ slik at $\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s}$ gir bidrag bare inni solenoiden:



$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I \quad \Rightarrow \quad H\,\ell + 0 + 0 + 0 = I\,N$$
$$\Rightarrow \quad \underline{H = H_0} = I\,N/\ell = I\,n = 800\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 3{,}50\,\mathrm{A} = \underline{2{,}80\,\mathrm{kA/m}}.$$

Alle feltstørrelser peker mot høyre i solenoidens akseretning (høyrehåndsregel, fingre rundt solenoiden i strømretning og tommelen er vektorretningen). Vist med piler i figuren.

b) $M = \chi_\mathrm{m} H$ gir

$$\begin{aligned} M_0 &= (\mu_\mathrm{r}-1)H = (1-1)\cdot H_0 = \underline{0\,\mathrm{A/m}}, \\ M &= (\mu_\mathrm{r}-1)H = (2000-1)\cdot H_0 = 5,60\cdot 10^6\,\mathrm{A/m}. \end{aligned}$$

Men denne verdien for M er ikke mulig, da metning M_s inntrer ved en lavere verdi som oppgitt. Magnetiseringen vil derfor bli

$$\underline{M = M_\mathrm{s} = 1,56\cdot 10^6\,\mathrm{A/m}}.$$

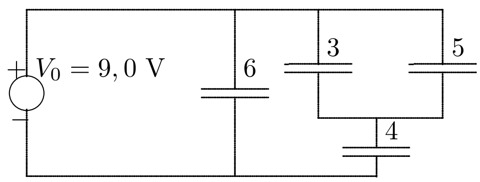
Verdier for magnetisk flukstetthet fra $B = \mu_0(H+M)$:

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_0(H_0+0) = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}\cdot 2800\,\mathrm{A/m} = \underline{3,52\,\mathrm{mT}}, \\ B &= \mu_0(H+M_\mathrm{s}) = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}\cdot(2,80+1560)\cdot 10^3\,\mathrm{A/m} = \underline{1,96\,\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Oppgave 6.

a) Venstre kondensator har spenning $V_0 = 9,0\,\mathrm{V}$, kapasitans $C_6 = 6\,\mu\mathrm{F}$ og dermed ladning $\underline{Q_6 = C_6\cdot V_0 = 54\,\mu\mathrm{C}}$.

b) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Spenningen over hver av 3 og 5 er like, $V_3 = V_5 \stackrel{\text{def}}{=} V_8$.



Seriekoplingen 8 og 4 har samme ladning over hver kondensator 8 og 4. Da er spenningen omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4\,\mu\mathrm{F}$, $V_8 = Q/8\,\mu\mathrm{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$. Totalspenning over 8 og 4 er V_0, dvs. $V_4 + V_8 = V_0$, som gir

$$V_5 = V_8 = V_0\cdot\frac{1}{3} = \underline{3,00\,\mathrm{V}}.$$

A.Mi. 14. aug. 2014.