 TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Eksamen 29. mai 2015. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rett svar:	B	D	A	C	D	A	A	E	B	A	D	E	A	B	D	D

Detaljer om spørsmålene:

1-1. B. I elektrostatikken er alltid et metall et ekvipotensial, alle potensialer inne er like. Overflateladningene induseres nettopp for å skjerme E-feltet fra den ladde staven. (Trykkfeil i de to siste alternativer, skulle vært: D) $V_1 = V_2 > V_3$ og E) $V_1 < V_2 = V_3$. Men begge gale, trykkfeil eller ikke.)

1-2. D.
$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left((-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2\right) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

1.3 A. Polariseringen $P = Np/V$ (dipolmoment per volumenhet) der p er molekylets dipolmoment og antall molekyler N er lik antall mol $\times$ molekyler per mol. Volumet til 1 liter vann er $1,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, og dette gir
$$P = \frac{Np}{V} = \frac{55,6\,\mathrm{mol}\cdot 6,02\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}\cdot 6,2\cdot 10^{-30}\,\mathrm{Cm}}{1,0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 0,208\,\mathrm{Cm}^{-2}\,.$$

1-4. C. Energi i kondensator $= \frac{1}{2}CV^2$, slik at svaret blir $\frac{1}{2}4,0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\cdot\left(300^2 - 150^2\right)\,\mathrm{V}^2 = 0,135\,\mathrm{J}$.

1-5. D. Metallplatene i hele sin bredde har samme potensial, da blir også elektrisk feltstyrke E lik overalt, både i venstre og høyre halvdel (ser bort fra randeffekter). Dette oppnås ved at fri ladning på metallplatene fordeler seg ulikt mellom høyre og venstre side. Med lik E (V/m) overalt faller potensialet like mye per lengdeenhet gjennom mediene, og alle punkter med samme avstand fra en av platene har samme potensial. Derfor $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$.

1-6. A.
$$P_1 = \chi_1\epsilon_0 E_1 = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \cdot \frac{D}{\epsilon_r\epsilon_0} = (1 - 1/\epsilon_r)\sigma_0$$
der vi har brukt at den elektriske flukstetthet $D = \sigma_0$ (den samme i hele volumet mellom metallplatene).

1-7. A. B-feltet fra AB har ved punktladningen retning ned i papirplanet. Krafta på positiv ladning har da etter h.h.regelen retning mot høyre, dvs. positiv x-retning.

1-8. E. Med $\vec{v}$ i $-x$-retning og $\vec{B}$ i $+x$-retning, er $\vec{F} = (-e)\vec{v}\times\vec{B} = \vec{0}$. Elektronstrålen fortsetter rett på magneten.

1-9. B. Kraftmoment $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$ der $\vec{\mu} = IA\hat{n}$ er parallell med flatenormalen $\hat{n}$. Etter h.håndsregelen vil $\vec{\tau}$ rotere sløyfa slik at $\hat{n}$ blir parallell med $\vec{B}$, og når de er parallelle er $\vec{\tau} = 0$.

1-10. A. $B = \mu H = (1+\chi)H$ der χ er magn. susceptibilitet. Når B faller med $0,003\,\%$ når I og dermed H er konstant, er $\chi = -3\cdot 10^{-5}$.

1-11. D. Metallet har frie valenselektroner. Ifølge Lorenzkrafta $\vec{F} = (-e)\vec{v}\times\vec{B}$ vil disse bevege seg mot øvre enden av staven (høyrehåndsregel).

1-12. E. Innenfor en tenkt sirkel Γ med radius r vil med tida fluksen Φ_B øke nedover. Det vil da induseres en ems. som ville gi en strøm mot klokka, slik at indusert B_{ind} vil gå oppover og motvirke økende Φ_B. Da vil i pkt. a $\vec{F} = q\vec{E}$ har retning mot venstre, negativ x-retning.

1-13. A. Med $I(t) = I_0\exp(i\omega t)$ er $V_L(t) = L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = iLI(t)$. Dvs. $V_L(t)$ er faktor i (90°) foran $V_R(t) = RI(t)$.

1-14. B. Effekten er $P(t) = V(t)\cdot I(t) = V(t)^2/R = V_0^2\sin^2(\omega t)/R$. Middeleffekten $\langle P\rangle = \langle\sin^2(\omega t)\rangle V_0^2/R = \frac{1}{2}V_0^2/R$ forandres ikke med frekvensen.

1-15. D. Pga. leddet $\cos(ky + \omega t)$ med + propagerer bølgen i negativ y-retning.

1-16. D. Med amplityder E_0 og B_0 er bølgefarta $c = E_0/B_0 = 6,20 \cdot 10^3$ V/m/(3,60 $\cdot 10^{-5}$ T) $= 172 \cdot 10^6$ m/s.

Oppgave 2. Gauss' lov

a) Ladning på innerste metallkule legger seg på ytterflata ved $r = a$ og ladningen på kuleskallet legger seg på innerflata ved $r = b$. (Ladningene tiltrekkes hverandre i metallet, eller kan vises fra Gauss' lov.) Bruk av Gauss' lov gir da at $\vec{E} = 0$ alle steder unntatt i det dielektriske mellomrommet, der vi får:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0} Q \qquad \Rightarrow \qquad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}.$$

Altså

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \;\text{ når } r \in [a, b] \qquad \vec{E} = \vec{0} \;\text{ når } r \notin [a, b].$$

b) Med $V(\infty) = 0$ og $E \neq 0$ kun i området $r \in [a, b]$ blir

$$V(a) = -\int_\infty^a E\,\mathrm{d}r = -\int_\infty^b E\,\mathrm{d}r - \int_b^a E\,\mathrm{d}r = 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]}.$$

Kommentar: En veldig typisk feil er å glemme at $E(r > b) = 0$, slik at det angis

$$V(a) = -\int_\infty^a E\,\mathrm{d}r = -\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^a = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\frac{1}{a}}.$$

c) Elektrisk felt enklest fra

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\vec{\nabla}V = -\frac{V_0}{b-a}\frac{\partial(b-r)}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} = \underline{\frac{V_0}{b-a}\,\hat{\mathbf{r}}}\,.$$

Kommentar: Flere har i besvarelsen satt inn for V_0, med $V_0 = V(a)$ fra b). Men dette er ikke rett, da potensialet i a blir høyere når det tilføres ladning til dielektrikumet. Det som derimot er rett er at $\vec{E}(a)$ ikke endres, fordi Gauss lov fortsatt gir $Q_\mathrm{enc} = Q$ innenfor a. Derfor er $E(a) = \frac{V_0}{b-a} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 a^2}$, som gir $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\frac{b-a}{a^2}$. Dermed er også rett svar: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{r}}$.

d) Gauss' lov på differensialform, der vi bruker divergens $\mathrm{div}\vec{D} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ for kulekoordinater:

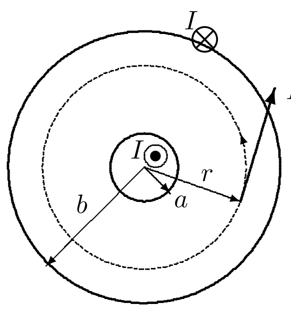
$$\rho(r) = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{V_0}{b-a}\,\hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{V_0}{b-a}\right) = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{V_0}{b-a}\frac{1}{r^2}2r = \underline{\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{2V_0}{b-a}\frac{1}{r}}\,.$$

Hvis uttrykt V_0 som vist i kommentar i c), blir et alternativt svar $\rho(r) = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{a^2\,r}$.

Alternativt uten bruk av divergens: $\rho(r) = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi r^2\mathrm{d}r}$. Der $Q(r) = Q_\mathrm{enc}$(kuleskall innenfor r) bestemmes fra Gauss' lov:

$$Q(r) = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\oint\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 E(r)4\pi r^2 = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{V_0}{b-a}4\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{V_0}{b-a}4\pi 2r = \underline{\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{2V_0}{b-a}\frac{1}{r}}\,.$$

Oppgave 3. Magnetfelt og induktans



a) Vi bruker Ampères lov for magnetfeltstyrken H med integrasjonsveg lik sirkel med radius r konsentrisk med kabelen (se stiplet sirkel på figuren).

P.g.a. symmetri vil H være asimutalt retta: $\vec{H} = H\,\hat{\phi}$ og ha konstant verdi på integrasjonvegen. Retningen gitt av høyrehåndsregelen. Amperes lov gir

$$\oint\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = H\cdot 2\pi r \stackrel{\text{(Amp)}}{=} I_\mathrm{encl} = \iint\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \tag{1}$$

der I_encl er strømmen i arealet innenfor integrasjonsvegen.

I ytterlederen er all strøm samla ved $r = b$. I innerlederen er strømmen jamt fordelt over tverrsnittet og strømtettheten er konstant og lik

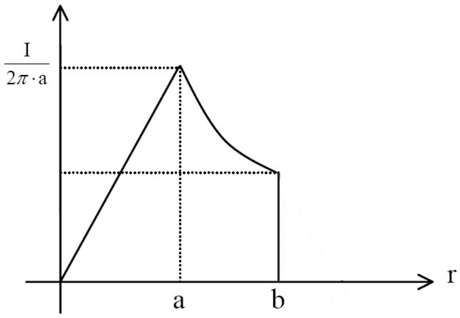
$$J_a = \frac{I}{\pi a^2}\,. \tag{2}$$

Nå er $\vec{J}\|\mathrm{d}\vec{A}$ og $\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r$, slik at $I_\mathrm{encl}(r)$ i innerlederen er

$$I_\mathrm{encl}(r) = \iint\vec{J}_a\cdot\mathrm{d}\vec{A} = J_a\cdot\int_0^r 2\pi r'\mathrm{d}r' = \frac{I}{\pi a^2}\cdot\pi\,(r')^2\big|_0^r = I\cdot\frac{r^2}{a^2}\,, \tag{3}$$

Sammenholdt med likn. (1) gir dette for de ulike områdene

Skisse av $H(r)$:



$$I_{\text{encl}} = \begin{cases} I \cdot \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ I & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi} \cdot \dfrac{r}{a^2} & r < a \\ \dfrac{I}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{r} & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

b) Energitettheten (per volumenhet) er for de ulike områder

$$u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot H^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 \left(\dfrac{I}{2\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{r^2}{a^4} & r < a \\ \dfrac{1}{2}\mu_0 \left(\dfrac{I}{2\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{r^2} & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

(Oppgaven burde ha oppgitt at permeabiliteten er μ_0 i hele området. Men når ikke annen μ er oppgitt, er dette den naturlige antakelsen.)

Energiinnhold på en lengde ℓ av kabelen blir da, med $\mathrm{d}\tau = 2\pi r \mathrm{d}r\, \ell$:

$$\begin{aligned} U = \int u \cdot \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 2\pi\,\ell \cdot \left[\int_0^a \frac{r^2}{a^4} r\mathrm{d}r + \int_a^b \frac{1}{r^2} r\mathrm{d}r\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 2\pi\,\ell \cdot \left[\frac{1}{4}\frac{a^4}{a^4} + \ln\frac{b}{a}\right] = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{2\pi}\,\ell \cdot \left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right] \end{aligned}$$

Energi per lengdeenhet blir $U' = U/\ell$, og fra oppgitt formel $U' = \frac{1}{2}L'I^2$ ser vi da at

$$\underline{L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]}.$$

Med de alternative $H(r) = Cr$ inni og $H(r) = Ca^2/r$ mellom, blir utregningen

$$u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot H^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 C^2 \cdot r^2 & r < a \\ \dfrac{1}{2}\mu_0 C^2 \cdot \dfrac{a^4}{r^2} & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$U = \int u \cdot \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\mu_0 C^2\, 2\pi\,\ell \cdot \left[\int_0^a r^2 r\mathrm{d}r + a^4 \int_a^b \frac{1}{r^2} r\mathrm{d}r\right] = \frac{1}{2}\mu_0\, 2\pi\,\ell \cdot C^2 a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right].$$

$$\underline{L' = \mu_0\, 2\pi \cdot \frac{C^2}{I^2} a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]}. \qquad \left(\text{Konstanten } C = \frac{I}{2\pi a^2}\right)$$

KOMMENTAR: En typisk feil her er ikke å integrere men sette $U = u\cdot$(volum). F.eks. $U = u\pi(b^2 - a^2)\ell$ eller noe liknende. Eller å ikke bruke sylinderkoordinater ved integrasjon. Mange glemmer også at L' får bidrag både fra området $r < a$ og $r \in [a,b]$, total L' er summen.

c) Numerisk for oppgitte data:

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{3,0}{0,50}\right] = 0,408\,\mu\mathrm{H/m} \qquad \underline{L = L' \cdot 10\,\mathrm{m} = 4,1\,\mu\mathrm{H}.}$$

Hvis du har brukt det alternative uttrykket for L' der C inngår, kan du ikke finne numerisk svar. Men kan presentere noe á la:

$$L' = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 2\pi \frac{C^2}{I^2} \cdot (0,50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^4 \left[\frac{1}{4} + \ln\frac{3,0}{0,50}\right] = 8\pi^2 \frac{C^2}{I^2} \cdot 1,28 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Hm}^3.$$

Oppgave 4. Magnetisk kraft

a) Krafta på partikkelen er $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Krafta er normal på $\vec{v}$, derfor endres ikke v, kun retningen. Og krafta virker alltid normalt på $\vec{B}$, dvs. i papirplanet. Når v er konstant og $\vec{F} \perp \vec{v}$ alltid, vil $F = |q\vec{v} \times \vec{B}|$ være konstant og gir en konstant avbøyning, dvs. en sirkelbane i et plan normal på $\vec{B}$ (papirplanet). Den magnetiske krafta $F = qvB$ vil altså utgjøre sentripetalkrafta i sirkelbanen:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB} \qquad \text{QED}\,.$$

b) Kinetisk energi $U = \frac{1}{2}mv^2$ gir $v = \sqrt{2U/m}$ og dermed

$$r = \frac{m\sqrt{2U/m}}{qB} = \frac{\sqrt{2Um}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3,0 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{J} \cdot 6,64 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 0,50\,\text{T}} = 0,499\,\text{m} = \underline{0,50\,\text{m}}.$$

Kontroll av enheten (hjelp fra Angell & Lian): $\dfrac{\sqrt{\text{Nm} \cdot \text{kg}}}{\text{As} \cdot \text{T}} = \dfrac{\sqrt{\text{kg}^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}}{\text{As} \cdot \text{kg}\,\text{s}^{-2}\text{A}^{-1}} = \text{m}.$

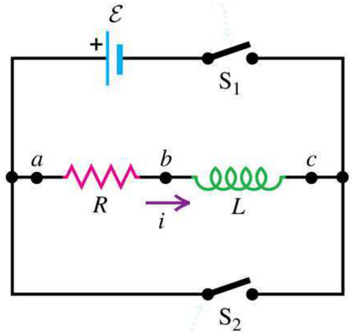
Hastigheten $v = \sqrt{2U/m} = \sqrt{2 \cdot 3,0 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{J/m}/6,64 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}} = 12,0 \cdot 10^6\,\text{m/s}$ og dermed ikke relativistisk.

Omløpstid T = omkrets / hastighet :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 6,64 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 0,50\,\text{T}} = \underline{0,26\,\mu\text{s}} \quad \text{eller} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,499\,\text{m}}{12,0 \cdot 10^6} = \underline{0,26\,\mu\text{s}}\,.$$

Kontroll av enheten (hjelp fra Angell & Lian): $\dfrac{\text{kg}}{\text{As} \cdot \text{T}} = \dfrac{\text{kg}}{\text{As} \cdot \text{kg}\,\text{s}^{-2}\text{A}^{-1}} = \text{s}.$

Oppgave 5. RL-krets



a) Spenningen over motstanden er $V_R = RI$ og spenningen over induktansen er $V_L = L\,\text{d}I/\text{d}t$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0^-$, og strømmen gjennom L kan ikke plutselig endres, slik at den er null også ved $t = 0^+$. Da er det også null strøm gjennom R: $\underline{V_R(0^+) = RI = 0}$

og hele spenningen $\mathcal{E}$ over L: $\underline{V_L(0^+) = \mathcal{E}}$.

b) Etter lang tid er I blitt konstant (stasjonære forhold, med strøm $I(\infty) = \mathcal{E}/R$), dermed er $\underline{V_L(\infty) = L\,\text{d}I/\text{d}t = 0}$

og hele spenningen $\mathcal{E}$ over R: $\underline{V_R(\infty) = \mathcal{E}}$.

c) Kretsen består nå kun av R og L i serie, med en gitt startstrøm bestemt av situasjonen før bryterne slås over. Strømmen i L kan ikke endre seg brått, dermed er $I(0^+) = I(0^-) = \mathcal{E}/R$. Denne strømmen går nå gjennom R, L og S_2. Det er ingen spenningsfall mellom c og a i figuren, slik at spenningen over R og L er motsatt like store. Da er $\underline{V_R(0^+) = I(0^+)R = \mathcal{E}}$ og $\underline{V_L(0^+) = -V_R(0^+) = -\mathcal{E}}$.

Spenningen over L kan endre seg brått, her endres den fra 0 til $-\mathcal{E}$.

d) Strømmen umiddelbart etter bryterne slås over er altså $I_0 = I(0^+) = \mathcal{E}/R$. Diff.likningen for kretsen fra Kirchhoffs lov:

$$IR + L\text{d}I/\text{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\text{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}(t-0)\,.$$

Altså

$$\underline{I(t) \;=\; I_0 \exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\} \;=\; \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}}.$$

Kommentar: Noen har i besvarelsen brukt kompleks analyse $e^{i\omega t}$ med $Z = R + i\omega L$. Men det er slett ingen harmonisk periodiske signal i kretsen, så slik analyse er helt feil.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 8. juni 15.