TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Eks. 4. aug. 2015 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Rett svar:	E	E	D	C	E	B	C	D	A	A	B	D	C	E

Detaljer om spørsmålene:

1-1. E. $Q = CV = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

1-2. E. For det første peker $\vec{E}$ ut fra en positiv flate som betyr at potensialet avtar utover, og det er en løsning på problemet. Vi må finne ut hvordan $V(z)$ ser ut i nærheten av et uendelig stort uniformt ladd positivt plan. Behandlet i tidligere oppgaver (eller se Ex. 22.7 i Y& F) og funnet at $\vec{E}$ er konstant og lik $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Da må V (for $z > 0$) bli $V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$. Når V_0 er 20 V, så skal vi finne z når $V(z) = 0$. Setter en inn dette får vi $z = 18$ cm.

1-3. D. Metallplatene i hele sin bredde har samme potensial, da blir også elektrisk feltstyrke E lik overalt, både i venstre og høyre halvdel (ser bort fra randeffekter). Dette oppnås ved at fri ladning på metallplatene fordeler seg ulikt mellom høyre og venstre side. Med lik E (V/m) overalt faller potensialet like mye per lengdeenhet gjennom mediene, og alle punkter med samme avstand fra en av platene har samme potensial. Derfor $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$. (49%)

1-4. C. $\vec{D}$ forandrer seg ikke ved grenseskillet da det ikke er frie ladninger der: 3 riktig
$\vec{P}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er størst, dvs. i øvre lag: 1 er riktig.
$\vec{E}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er minst, dvs. i nedre lag: 2 er riktig. (67%)

1-5. E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

1-6. B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

1-7. C. Magnetfeltet B har inni strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel) og øker med tida idet I øker. Den magnetiske fluks Φ_B øker altså nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som gir en magnetisk fluks oppover, ergo må strømretningen være mot klokka. I avstand r fra rett leder er $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ og Faradays lov gir (integral over sløyfa) $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int B\,\mathrm{d}A = -\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\partial I}{\partial t}\displaystyle\int \dfrac{b\mathrm{d}r}{r}$, altså prop. med $\frac{\partial I}{\partial t} = k$.

1-8. D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

1-9. A. Innenfor en tenkt sirkel Γ med radius r vil med tida fluksen Φ_B øke nedover. Det vil da induseres en ems. som ville gi en strøm mot klokka, slik at indusert B_{ind} vil gå oppover og motvirke økende Φ_B. Da vil i pkt. a $\vec{F} = q\vec{E}$ har retning mot venstre, negativ x-retning.

1-10. A. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A} \cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $B = (1 + \chi_m)\mu_0 H \approx \mu_0 H = 8,80\,\mathrm{mT}$.

1-11. B. Når pære 2 tas ut blir kretsens totale resistans større (med 2 inne: $2R + 3R//R = 11/4 \cdot R$ og med 2 ute: $3R$). Når resistansen øker, avtar strømmen i kretsen. Strømmen går i sin helhet gjennom 1, slik at lysstyrken ($P = RI^2$) i denne avtar.

1-12. D. En kondensators impedans er $|Z| = 1/(\omega C) = 1/(1,00 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}) = 5,0\,\Omega$

1-13. C. Strømampl. $|I| = |V|/|Z|$ der impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$. Pga. leddet $1/(i\omega C)$ (og altså kapasitansen C) får Z svært stor verdi og strømamplituden veldig liten verdi når $\omega \to 0$.

1-14. E. Bølgefarten $c = \lambda f$ er lik for alle frekvenser mens frekvensen f er omvendt prop. med bølgelengden λ.

Oppgave 2. Ladde kuler

a) Et metall har en stor mengde valenselektroner som kan bevege seg tilnærmet fritt i metallet. Eventuelle overskuddselektroner beveger seg også helt fritt. En absolutt krav er at E-feltet inni metallet alltid er null. Hadde $E \neq 0$ ville overskuddsladningene flyttet seg inntil $E = 0$ igjen. Vi kan legge ei Gaussflate inni metallet, da $E = 0$ overalt må volumet innenfor Gaussflata ha null ladning. Gaussflata kan legges vilkårlig, så da må det være ladningsfritt overalt inni lederen, ladninger må legge seg på overflata. En annen måte å se det på er at overskuddsladninger vil frastøtes hverandre og går så langt unna som mulig. For ei kule blir det på overflata.

Pga. symmetri må ladningen fordele seg jamt over heile overflata. Eller mer detaljert argumentert: Dersom ladningen var ujamt fordelt ville det bli et tangentialt $E_{||}$-felt på overflata. Overflateladningene vil da flytte seg inntil $E_{||}$ blir null overalt.

b) Potensial $V(r)$ (relativt $V(\infty) = 0$) fra definisjonen, med $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}}$. Først for $r \geq R_1$:

$$V(r \geq R_1) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}.$$

Inni metallet er $\vec{E} = \vec{0}$ og ifølge definisjonen derfor ingen endring i potensialet:

$$V(r < R_1) = V(R_1) = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}}.$$

Elektrostatisk energi enklest fra

$$U = \frac{1}{2}\int_Q V\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}V(R_1)Q = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}},$$

siden all ladning er samla på potensial $V(R_1) = V_1$.

c) Vi bruker $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Når ladningen Q fordeler seg på henholdsvis kule 1 og 2 med Q_1 og $Q_2 = Q_1 - Q$ blir sluttenergien

$$U_{\text{slutt}} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{2}k\frac{Q_2^2}{R_2} = \frac{1}{2}k\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{2}k\frac{(Q - Q_1)^2}{R_2}.$$

Minimum energi som funksjon av Q_1 finnes ved å sette deriverte mhp. Q_1 lik null:

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{slutt}}}{\mathrm{d}Q_1} = \frac{1}{2}k\left(\frac{2Q_1}{R_1} + \frac{2(Q - Q_1)\cdot(-1)}{R_2}\right) = k\left(\frac{Q_1 R_2 - (Q - Q_1)R_1}{R_1 R_2}\right) \equiv 0$$

som gir

$$Q_1 R_2 = (Q - Q_1)R_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Q_1 = Q\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \qquad \text{og} \qquad \underline{Q_2 = Q - Q_1 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Merk at totalenergien avtar:

$$U_{\text{slutt}} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}kQ^2\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2 R_1} + \frac{1}{2}kQ^2\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 R_2} = \frac{1}{2}kQ^2\frac{1}{R_1 + R_2} < U = \frac{1}{2}kQ^2\frac{1}{R_1}.$$

d) Potensial på ei lederkule har vi uttrykk for i pkt. b), og for kule 1 og 2 gir dette henholdsvis:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)} \qquad \text{og} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}$$

$V_1 = V_2$ slik at spenningen mellom dem er null. Ladningen fordeler seg som om metallkulene var forbundet med en metalltråd.

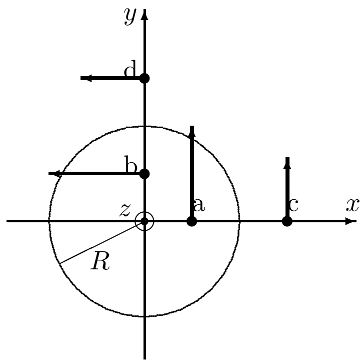
Oppgave 3. Magnetiske felt

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r$, og da J varierer med r må vi integrere:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \int_0^R J(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\, J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right)\cdot\mathrm{d}r = 2\pi\, J_0\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}\frac{R^3}{R}\right) = \underline{\frac{\pi}{3}\, J_0 R^2}. \end{aligned}$$

b) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. Dette gjelder også inni ledningen.

I figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene. Størrelsen på feltene (lengden på vektorene) er ikke viktig, kan ikke bestemmes før c) og d) er løst. (Resultatet der viser at forholdene er 9:6 med størst felt inni.)



c) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\mathrm{u}}(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r. Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3} J_0 R^2 \,,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_{\mathrm{u}}(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\pi}{3} J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0 \frac{R^2}{6r}} \,.$$

d) Inni lederen finner vi

$$\begin{aligned} I(r < R) &= \int_0^r J(r') \cdot 2\pi r' \mathrm{d}r' \\ &= 2\pi\, J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}r' = 2\pi\, J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3}\frac{r^3}{R} \right) = \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) . \end{aligned}$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_{u} ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_{\mathrm{i}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} r - \frac{\mu_0\, J_0}{3R} r^2$$

Altså er

$$\underline{C_1 = \frac{1}{2} \mu_0\, J_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{C_2 = -\frac{\mu_0\, J_0}{3R}}$$

Oppgave 4. Hallprobe

a) Strømmen og ladningene går i positiv x-retning. Magnetfeltet går i negativ z-retning. Med vektornotasjon, der v_{d} og B er regnet positive, får vi $\vec{v}_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d}}\, \hat{\mathbf{i}}$ og $\vec{B} = -B\, \hat{\mathbf{k}}$. Dette gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = q \vec{v}_{\mathrm{d}} \times \vec{B} = e \cdot v_{\mathrm{d}} \cdot B\, \hat{\mathbf{i}} \times (-\, \hat{\mathbf{k}}) = e v_{\mathrm{d}} B\, \hat{\mathbf{j}} \,.$$

Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E-felt retning nedover: $\vec{E} = -E\, \hat{\mathbf{j}}$ (vist i figur i oppgaven). Potensialforskjellen $V_{\mathrm{H}} = E \cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_{\mathrm{E}} = e \cdot \vec{E} = -eE\, \hat{\mathbf{j}} \,.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_{\mathrm{E}} + \vec{F}_{\mathrm{B}} = -eE\, \hat{\mathbf{j}} + e v_{\mathrm{d}} B\, \hat{\mathbf{j}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E = v_{\mathrm{d}} B \,, \quad \text{og altså} \quad \underline{V_{\mathrm{H}} = E \cdot d = v_{\mathrm{d}} B d} \quad \text{(med høyest potensial øverst).}$$

b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_{d} for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_{\mathrm{d}} \cdot t\, d \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{d}} = \frac{I}{n\, q\, t\, d} \left(= \frac{0,15\,\mathrm{A}}{5,0 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 625\,\mathrm{m/s} \right) .$$

Fra uttrykk for V_{H} ser vi at magnetfeltet da er

$$B = \frac{V_{\mathrm{H}}}{v_{\mathrm{d}} d} = \frac{V_{\mathrm{H}}}{I} \cdot n\, q\, t = \frac{6,5\,\mathrm{V}}{0,15\,\mathrm{A}} \cdot 5 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{0,52\,\mathrm{T}} .$$

A.Mi. 6. aug. 2015.