Eksamen 25. mai 2016. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Rett svar:	C	D	B	A	C	A	A	E	A	D			
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Rett svar:	E	C	E	D	C	C	B	A	C	C	C	D	E

Detaljer om spørsmålene:

1-1. C. Bruker $\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i$ med origo for eksempel midt på linjen mellom de to ladningene $-q$. Da blir $p = 2q \cdot h$, der h er høyden fra "grunnlinjen" opp til ladningen $2q$. Ser fra figuren at $h = a\cos 30 = \sqrt{3}a/2$, slik at $p = \sqrt{3}qa$.

1-2. D.
$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left((-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2\right) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

1-3. B. De positive ladningene gir som resultant en tiltrekkende kraft som virker rett mot venstre (retning 4). De negative ladningen gir som resultant en frastøtende kraft som virker rett mot høyre (retning 2). Fordi vinkelen til "+" er større enn vinkelen til "−", vil komponenten for "−"være størst, og krafta er frastøtende i retning 2.

1-4. A. Vi bruker Gauss' lov og legger gaussflater like utenfor de to hulrommene, altså gaussflater som i sin helhet er inne i metallkula. Da er $E = 0$ overalt på disse gaussflatene, så netto ladning innenfor dem er også lik null. Konklusjon: Null ladning på overflaten av hulrom 1, ladning $-Q$ på overflaten av hulrom 2. Metallkula er alt i alt nøytral, så resterende ladning Q må fordele seg på dens ytre overflate.

1-5. C. Plan med ladning σ per flateenhet gir elektrisk felt $E = -\sigma/2\epsilon_0$ til venstre for planet og $+\sigma/2\epsilon_0$ til høyre for planet, mens plan med ladning -2σ per flateenhet gir elektrisk felt $E = +2\sigma/2\epsilon_0$ til venstre for planet og $-2\sigma/2\epsilon_0$ til høyre for planet. Dermed er det bare å legge sammen bidragene fra de tre planene. Det gir $E = 0$ for $z < 0$ og for $z > 2a$, $E = \sigma/\epsilon_0$ for $0 < z < a$ og $E = 2\sigma/\epsilon_0$ for $a < z < 2a$. Dermed graf C.
(Trykkfeil i oppgave: Alternativ E) var notert D), dvs. to ganger D).)

1-6. A. Fra forrige oppgave har vi at V er konstant for $z < 0$, at V avtar lineært mellom $z = 0$ og $z = a$, at V avtar (raskere...!) lineært mellom $z = a$ og $z = 2a$, og at V er konstant for $z > 2a$. Dermed: $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$.
(Trykkfeil i oppgave: Alternativ E) var notert D), dvs. to ganger D).)

1-7. A. Elektrisk feltstyrke $E = D/(\epsilon_r\epsilon_0)$ er omvent proporsjonal med relativ permittivitet ϵ_r, idet D er lik i begge medier. Stemmer ned alternativ A.

1-8. E. Alle fem koblet i serie gir total kapasitans 1,0 mF.

1-9. A. Lysstyrke prop. med effekt $P = VI = RI^2 = V^2/R$. Størst strøm gir størst effekt. Hvis det går en strøm I i pære 1 vil denne fordeles på 2,3,4 og 5 slik at strømmen uansett blir mindre gjennom disse.

1-10. D. Når forholdene ikke endrer seg ($t \to \infty$) går det ingen strøm inn til kondensatorene og kan derfor ansees som åpne kretser. Da er $I_2 = I_4 = 0$. Den tilsynelatende totale resistansen ved $t \to \infty$ blir $R_{\rm tot} = R+R+R+R = 4R$, slik at $I_3 = I_1 = V_0/R_{\rm tot} = V_0/4R$. (Alternativ C) og E) dessverre blitt like, men altså feil svar.)

1-11. E. Magnetiske feltlinjer er lukkede kurver slik at fluks inn alltid må være lik fluks ut av lukkede flater, eller matematisk ved Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot {\rm d}\vec{A} = 0$.

1-12. C. Magnetiske feltlinjer er lukkede kurver som går gjennom magneten. Retningen i pkt. 0 viser at feltlinjene går i x-retning gjennom magneten (nordpol til høyre). Da går feltlinjer i x-retning også ved pkt. 1, og ved pkt 2 går feltlinjene rett til venstre, retning $-x$.

1-13. E. Elektrisk kraft F_E har retning $\hat{\mathbf{j}}$ og magnetisk kraft F_B har retning $-\hat{\mathbf{j}}$. Ingen avbøyning når $F_E = F_B$, altså $qE_0 = qvB_0 =$ og $v = E_0/B_0 = 10 \cdot 10^3/50 \cdot 10^{-3}\,{\rm m/s} = 2 \cdot 10^5\,{\rm m/s} = 200\,{\rm km/s}$.

1-14. D. Det meste fra formelark: $\mu = \mu_r\mu_0 = (\chi_m + 1)\mu_0 = 1501 \cdot \mu_0$ slik at $B = \mu I\, N/\ell = 1501 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,00 \cdot 200/0,3142\,{\rm T} = 2,401\,{\rm T} = 2,4\,{\rm T}$.

1-15. C. Ifølge høyrehåndsregelen vil B-feltet mellom ledningene ha motsatt retning fra de to ledningene, med null midt mellom og positiv z-retning nærme høyre ledning og negativ retning nærme venstre ledning.

1-16. C. Magnetfeltet B har inni strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel) og øker med tida idet I øker. Magn. fluks Φ_B øker altså nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som gir magnetisk fluks oppover, ergo må strømretningen være mot klokka. B-feltet ved enhver posisjon er proporsjonal med I, derfor er også Φ_B prop. med I og indusert ems. $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \propto \frac{\partial I}{\partial t} = k$.

1-17. B. Strømmen i spolene kan ikke endres brått, slik at den er null. Da er det kun de to motstandene 10,0 Ω og 60,0 Ω som utgjør kretsen, og strømmen blir $I = V_0/(\Sigma R) = 100,0\,\text{V}/70,0\,\Omega = 1,43\,\text{A}$.

1-18. A. Etter lang tid er $\dot{I} = 0$ og derfor ingen spenningsfall over spolen. Den parallelle 60,0 Ω-motstanden har derfor null spenningsfall (og null strøm).

1-19. C. Impedans $Z = i\omega L$ gir amplityder $I_0 = V_0/(i\omega L)$ med størrelse $|I_0| = |V_0|/(\omega L) = |V_0|/(2\pi f L) = 50 \cdot 10^{-3}/(2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-6})\,\text{A} = 3,18\,\text{A}$.

1-20. C. Ved resonans er V_L og V_C motsatt like store, og de er hver henholdsvis $\pi/2$ foran og $\pi/2$ etter V_R.

1-21. C. For seriekopling er $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Her er $Z_1 = Z_2 = \dfrac{1}{i\omega C}$ og (parallellkopling) $\dfrac{1}{Z_3} = 3\dfrac{1}{1/i\omega C} = 3i\omega C$. Dermed er $Z = \dfrac{2}{i\omega C} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{7}{3}\dfrac{1}{i\omega C}$.

1-22. D. $\vec{E}$ må være normalt på bølgeretningen, men kan være i enhver retning i yz-planet. Bølgeretningen her er $\vec{E} \times \vec{B} \propto \hat{\mathbf{i}}$.

1-23. E. Alle er sanne

Oppgave 2. Potensial.

a) I punktet P peker feltet fra den positivt ladde staven radielt bort fra denne, mens feltet fra den negativt ladde staven peker radielt inn mot denne. Styrken er lik $|E|$ for begge. Vertikalkomponentene nulles ut og horisontalkomponenten er lik

$$E_\mathrm{P} = 2 \cdot |E| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{d} = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{5,0 \cdot 10^{-9}}{0,50}\,\text{V/m} = \underline{90\,\text{V/m}}.$$

b) På midtnormalen (midtplanet) mellom de to linjeladningene er retningen til $\vec{E}$ normalt på planet. (Vi har jo vist det i et tilfeldig valgt punkt P på midtplanet). Dette planet er da en ekvipotensialflate. Punktet P har derfor samme potensial som referansepunktet O, altså lik null.

Eventuelt utregnet: Potensialet i avstand r fra én linjeladning med referanse i et punkt a er
$V(r) - V(a) = -\int_a^r E(r')\,\mathrm{d}r' = -\int_a^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}\,\mathrm{d}r' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{a}$.
I P er avstanden $r = d$ fra både $+\lambda$ og $-\lambda$. Totalt potensial i P ift. referansen a midt mellom ladningene blir summen av potensialet fra hvert av disse:

$$V(\mathrm{P}) \;=\; -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{a} - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d}{a} \;=\; \underline{0\,\text{V}}.$$

c) Potensialet i avstand r fra én linjeladning med referanse i et punkt a er

$$V(r) - V(a) = -\int_a^r E(r')\,\mathrm{d}r' = -\int_a^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}\,\mathrm{d}r' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{a}.$$

P_2 er i avstand r = 0,10 m fra $+\lambda$, og i avstand r = 0,40 m fra $-\lambda$. Totalt potensial i P_2 ift. referansen a= 0,25 m midt mellom ladningene blir summen av potensialet fra hvert av disse:

$$\begin{aligned} V(\mathrm{P}_2) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{0,10}{0,25} - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{0,40}{0,25} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{0,25}{0,10}\cdot\frac{0,40}{0,25}\right) = \frac{2,5\cdot 10^{-9}}{2\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\,\text{V}\cdot\ln 4 = \underline{62\,\text{V}}. \end{aligned}$$

Oppgave 3. Elektrostatikk.

a) Siden vi i b) får bruk for ladning innenfor en generell radius $r \leq R$, beregner vi denne:

$$Q_\mathrm{encl}(r) = \int_0^r \rho(r')\,\mathrm{d}\tau = \int_0^r \rho_0\frac{r'}{R}\,4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0\,4\pi}{R}\frac{r'^4}{4}\bigg]_0^r = \rho_0\,\pi\frac{r^4}{R}.$$

Da er totalladning

$$Q = Q_\mathrm{encl}(r = R) = \underline{\rho_0\,\pi R^3}.$$

b) Vi kan bruke Gauss' lov for enten $\vec{D}$ eller for $\vec{E}$ med permittivitet $\epsilon_r\epsilon_0$. Velger det første. Kulesymmetri gir at $\vec{D} \parallel \mathrm{d}\vec{A} \parallel \hat{\mathbf{r}}$, slik at vi får

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_{\mathrm{encl}}(r) = \rho_0\,\pi\frac{r^4}{R} \qquad \Rightarrow \qquad D(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4R} \quad (r < R)$$

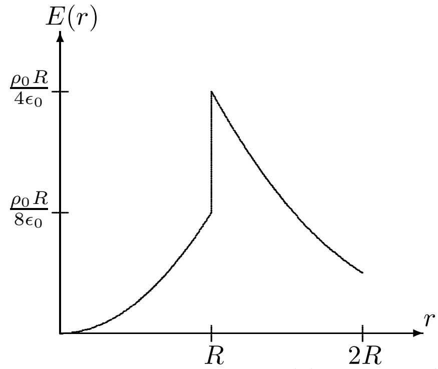
og dermed, med $\epsilon_r = 2,00$

$$\vec{E}(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_r\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0 r^2}{\epsilon_r 4\epsilon_0\,R}\,\hat{\mathbf{r}} = \underline{\frac{\rho_0 r^2}{8\epsilon_0\,R}\,\hat{\mathbf{r}} \quad (r < R).} \tag{1}$$

På utsiden er E-feltet som en punktladning Q i sentrum og med permittivitet ϵ_0:

$$\underline{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0\,R^3}{4\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \quad (r > R)\,.}$$

P.g.a. ulik permittivitet er feltet "like innenfor" kulas overflate bare halvparten så stort som feltet "like utenfor" kulas overflate. (Dette skyldes at vi har fått indusert en positiv ladning på kulas overflate pga. polariseringen av den dielektriske kula. Tilsvarende har vi en indusert negativ ladning inne i kula som resulterer i at det totale elektriske feltet inne i kula blir mindre enn om den ikke hadde vært dielektrisk.) Skisse av $E(r)$ til høyre.



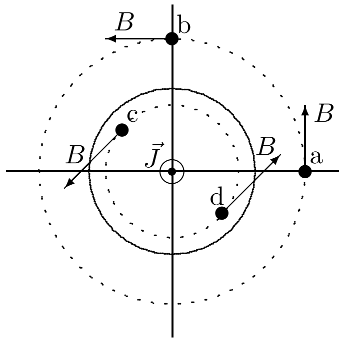
c) Det enkleste er å bruke at polariseringen er lik $P = \chi_e\epsilon_0 E$ med $\chi_e = \epsilon_r - 1 = 1,00$ og bruke $\epsilon_0 E(r)$ fra likn. (1):

$$\underline{P(r)} = \chi_e\epsilon_0 E(r) = 1,00\cdot\epsilon_0 E(r) = \underline{\frac{\rho_0 r^2}{8\,R}}\,.$$

Retningen for $\vec{D}$, $\vec{E}$ og $\vec{P}$ er alle den samme, radielt utover. ($\vec{P}$ går fra negative til positive induserte ladninger, og vi har positive induserte ladninger på overflata.)

Oppgave 4. Magnetfelt

a) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse, både utenfor og inni lederen. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir slike konsentriske sirkler (stiplet i figuren). I figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene som tangenter til magnetfeltet.



b) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_u(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r.

Utenfor lederen er $I(r)$ konstant for alle r, som oppgitt:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{2}J_0 R^2\,,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_u(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}}\cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\pi}{2}\,J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0\frac{R^2}{4r}}\,.$$

c) Inni lederen finner vi (evt. med hjelp i oppgitt I_0 i oppgaveteksten)

$$I(r < R) \quad = \quad \int_0^r J(r')\cdot 2\pi r'\mathrm{d}r'$$

$$= \quad 2\pi\, J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^3}{R^2} \right) \cdot \mathrm{d}r' = 2\pi\, J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^2} \right) = \pi J_0 r^2 - \frac{\pi J_0}{2R^2} r^4.$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med oppgitt I_0.)

Fra Amperes lov (som gitt for B_u ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_\mathrm{i}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \left(\pi J_0 r^2 - \frac{\pi J_0}{2R^2} r^4 \right) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} r - \frac{\mu_0\, J_0}{4R^2} r^3$$

Altså er

$$\underline{C_1 = \frac{\mu_0\, J_0}{2}} \qquad \text{og} \quad \underline{C_3 = -\frac{\mu_0\, J_0}{4R^2}}\,.$$

(For $r = R$ ser vi at $B_\mathrm{i}(R) = B_\mathrm{u}(R)$, rimelig nok.)

Oppgave 5. Kondensator og forskyvningsstrøm.

a) Forskyvningsstrømmen er $I_\mathrm{d} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ der Φ er elektrisk fluks mellom kondensatorplatene. Fra Gauss lov (eller velkjent fra før) får vi $\Phi = DA = Q$ = ladning på kondensatoren og dermed

$$I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I_0 = \underline{10,0\,\mu\mathrm{A}}$$

med samme retning som I, dvs. i positiv retning (mot høyre).

b) Finner først total resistans i dielektrikumet mellom platene:

$$R = \rho \frac{d}{A} = 2,0 \cdot 10^{12}\,\Omega\,\mathrm{m}\, \frac{2,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{50,00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2} = 8,00 \cdot 10^9\,\Omega.$$

Strømmen I går fra positiv til negativ plate, som vi har definert som positiv retning. Derfor minustegn (Q avtar) i oppgitt uttrykk: $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Vi bruker videre for kondensatoren $Q = CV$ og Ohms lov $V = RI$, som gir

$$I(t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -CR\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}\,.$$

Løsning av denne diff.likn. med $I = I_0'$ ved $t = 0$ gir

$$I(t) = I_0' \exp\left(-\frac{t}{RC} \right)\,,$$

der

$$RC = 8,00 \cdot 10^9\,\Omega \cdot 17,7\,\mathrm{n\,F} = 141,6\,\mathrm{s} \qquad \text{og} \quad I_0' = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} = \frac{10\,\mu\mathrm{C}}{141,6\,\mathrm{s}} = 70,62\,\mathrm{nA}.$$

Merk at I_0' er ulik I_0 i oppgave a). Etter $t = 1,00\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ er

$$I(60\,\mathrm{s}) = 70,62\,\mathrm{nA} \cdot \exp\left(-\frac{60}{141,6} \right) = 70,62\,\mathrm{nA} \cdot 0,655 = 46,23\,\mathrm{nA} = \underline{46\,\mathrm{nA}}.$$

[Kunne også beregnet RC fra $R \cdot C = \rho\frac{d}{A} \cdot \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 \frac{A}{d} = \rho \cdot \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 = 2,0 \cdot 10^{12}\,\Omega\,\mathrm{m} \cdot 8,00 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} = 141,6\,\mathrm{s}.$]

c) Med samme begrunnelse som i **a)** er $I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. I **a)** økte $Q(t)$ og I_d hadde positiv retning (mot høyre). Nå avtar $Q(t)$ slik at I_d er negativ, dvs. negativ retning (mot venstre). Ved $t = 60$ s er

$$I_\mathrm{d}(60\,\mathrm{s}) = -I(60\,\mathrm{s}) = \underline{-46\,\mathrm{nA}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 30. mai 16.