Eks. 19. aug. 2016 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Rett svar:	D	C	B	E	D	D	C	D	B	C	
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Rett svar:	E	D	E	B	B	C	D	C	A	B	E

Detaljer om spørsmålene:

1-1. D. Newtons lov – kraft er lik motkraft! (Coulombs lov gir størrelsen $F = \dfrac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$).

1-2. C. La $F = kq^2/a^2$ der $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ og a er sidekant i kvadratet, diagonalen er da $a\sqrt{2}$. Tiltrekkende kraft mot venstre: F. Tiltrekkende kraft nedover: $3F$. Frastøtende kraft på skrå oppover mot høyre: $F \cdot 2\sqrt{2}/(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}F$, med horisontalkomponent og vertikalkomponenter begge $\sqrt{2}F \cdot \sin\pi/4 = F$. Resultantkrafta er da null horisontalkomponent og vertikalkomponent $2F$ retta nedover. Dermed pil nr 3.

1-3. B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q. Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

1-4. E. For det første peker $\vec{E}$ ut fra en positiv flate som betyr at potensialet avtar utover, og det er en løsning på problemet. Vi må finne ut hvordan $V(z)$ ser ut i nærheten av et uendelig stort uniformt ladd positivt plan. Her er $\vec{E}$ konstant og lik $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Da må V (for $z > 0$) bli $V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$. Når V_0 er 20 V, så skal vi finne z når $V(z) = 0$. Setter en inn dette får vi $z = 18$ cm.

1-5. D. Begge har potensial $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ på overflata. For kule 1 er all ladning ved dette potensial og $U_1 = \frac{1}{2}V(R)Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$, som oppgitt. For kule 2 er ladningen fordelt på gradvis stigende potensial $V(r)$ innover i kula, den må derfor ha høyere totalenergi $U_2 = \int_{\text{kule}} \frac{1}{2}V(r)\mathrm{d}q > \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$. Alle alternative uttrykk inneholder $\frac{Q^2}{R}$, og vi ser at det er kun alternativet D som har $U_2 > U_1$: $3/20 > 1/8$. Trenger altså ikke gjøre vidløftige utregninger.

1-6. D. Metallplatene i hele sin bredde har samme potensial, da blir også elektrisk feltstyrke E lik overalt, både i venstre og høyre halvdel (ser bort fra randeffekter). Dette oppnås ved at fri ladning på metallplatene fordeler seg ulikt mellom høyre og venstre side. Med lik E (V/m) overalt faller potensialet like mye per lengdeenhet gjennom mediene, og alle punkter med samme avstand fra en av platene har samme potensial. Derfor $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$.

1-7. C. $\vec{D}$ forandrer seg ikke ved grenseskillet da det ikke er frie ladninger der: 3 riktig
$\vec{P}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er størst, dvs. i øvre lag: 1 er riktig.
$\vec{E}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er minst, dvs. i nedre lag: 2 er riktig.

1-8. D. De to parallellkretsene har ingen vekselvirkning med hverandre, dvs. svar er uavhengig av høyre delkrets. Venstre kondensator har spenning $V_0 = 9,0\,\text{V}$, kapasitans $C_6 = 6\,\mu\text{F}$ og dermed ladning $Q_6 = C_6 \cdot V_0 = 54\,\mu\text{C}$.

1-9. B. De to parallellkretsene har ingen vekselvirkning med hverandre, dvs. svar er uavhengig av venstre delkrets. I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Spenningen over hver av 3 og 5 er like, $V_3 = V_5 \stackrel{\text{def}}{=} V_8$.
Seriekoplingen 8 og 4 har samme ladning over hver kondensator 8 og 4. Da er spenningen omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4\,\mu\text{F}$, $V_8 = Q/8\,\mu\text{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$. Totalspenning over 8 og 4 er V_0, dvs. $V_4 + V_8 = V_0$, som gir $V_5 = V_8 = V_0 \cdot \frac{1}{3} = 3,00\,\text{V}$.

1-10. C. Protonet (pos. ladning) utsettes for en magnetisk kraft $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ med retning nedover, dvs. neg. y-retning. For å oppheve F_B må elektrisk kraft $F_E = qE$ ha retning i positiv y-retning. Kraftbalanse: $qE = qvB$ gir $E = vB$.

1-11. E. Retningen på magnetfeltet rundt den vertikale lederen er asimutalt i et horisontalt plan. Krafta på den horisontale lederen er null i det nærmeste punktet, og for alle andre punkter vil krafta på to punkter like langt fra dette midtpunktet kansellere med like stor i hver retning. Det vil derimot være et netto dreiemoment på lederen.

1-12. D. De rette ledere produserer ikke felt ved P da $I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r} = \vec{0}$. Den sirkulære delen gir et B-felt som går ned i papirplanet innenfor(nedenfor) halvsirkelen.

1-13. E. Ifølge høyrehåndsregelen vil H-feltet ha samme retning fra de to ledningene mellom ledningen (normalt på papirplanet). Utenfor hver av ledningen vil H være i motsatt retning, men den nærmeste ledningen gir sterkest H-felt.

1-14. B. Som oppgitt løper magnetfeltlinjer ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning.

1-15. B. Magnetfeltet B har rundt strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel). Under bevegelsen reduseres sløyfas magnetiske fluks Φ_B nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som opprettholder fluks nedover, ergo må strømretningen være med klokka, dvs. mot venstre i nedre del. Med $\vec{B}$ ned i papirplanet og I mot venstre har $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ retning nedover.

1-16. C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial (BA\cos\theta)}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = BA\sin\theta\cdot\omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

1-17. D. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A}\cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $B = (1+\chi_\mathrm{m})\mu_0 H 151 \cdot \mu_0 H = 1,33\,\mathrm{T}$.

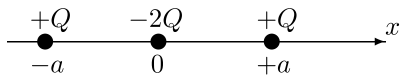
1-18. C. For seriekopling er $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Her er $Z_1 = Z_2 = \dfrac{1}{i\omega C}$ og (parallellkopling) $\dfrac{1}{Z_3} = 3\dfrac{1}{1/i\omega C} = 3i\omega C$. Dermed er $Z = \dfrac{2}{i\omega C} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{7}{3}\dfrac{1}{i\omega C}$.

1-19. A. En kondensators impedans er $|Z| = \left|\dfrac{1}{i\omega C}\right| = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 5,0\,\mathrm{mF}} = 2,00\,\Omega$.

1-20. B. Sammenliknet med formen $E_0\sin(kx+\omega t)$ ser vi at $\omega = 2,4\cdot 10^6\,\pi \cdot 3,0\cdot 10^8 = 2,26\cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ og $f = \omega/(2\pi) = 3,6\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$.

1-21. E. Bølgefarten $c = \lambda f$ er lik for alle frekvenser mens frekvensen f er omvendt prop. med bølgelengden λ.

Oppgave 2. Punktladninger



a) Elektrisk felt på x-aksen for én punktladning i $x = 0$ er $\vec{E}(x) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} = k\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}}$. For disse tre punktladninger når $x > a$:

$$\underline{\vec{E}(x) = k\left(\frac{Q}{(x+a)^2} + \frac{-2Q}{x^2} + \frac{Q}{(x-a)^2}\right)\hat{\mathbf{i}}} \tag{1}$$

evt. sammenfattet til én brøk (ikke påkrevd):

$$\begin{aligned} E(x) &= kQ\frac{x^2(x-a)^2 - 2(x+a)^2(x-a)^2 + (x+a)^2x^2}{x^2(x+a)^2(x-a)^2} \\ &= kQ\frac{x^4 - 2x^3a + x^2a^2 - 2(x^4 - 2x^2a^2 + a^4) + x^4 + 2x^3a + x^2a^2}{x^2(x^2-a^2)^2} \\ &= kQ\frac{6x^2a^2 - 2a^4}{x^2(x^2-a^2)^2} = \underline{kQ\frac{2a^2(3x^2-a^2)}{x^2(x^2-a^2)^2}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Kan beregnes på ulike måter. Det enkleste er å summere energi parvis over ladningene og bruke oppgitt $V(r) = kQ/x$ for punktladning. Potensialet (energi per ladning) i $x = 0$ fra ladningen Q i $x = -a$ er kQ/a, slik at energien mellom de to ladningene i $x = -a$ og $x = 0$ er $k\frac{Q\,(-2Q)}{a}$. Osv. for de to andre parene gir totalt

$$U = k\left(\frac{Q\,(-2Q)}{a} + \frac{Q\,Q}{2a} + \frac{(-2Q)\,Q}{a}\right) = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Eller ved å beregne energien ved å plassere inn én og én ladning. Første ladning, la oss velge $-2Q$, plasseres inn gratis uten energi. Etter plasseringen er potensialet i $x = -a$ lik $k\dfrac{-2Q}{a}$. Potensial i et punkt er energi per ladning, slik at energi for å plassere inn påfølgende $+Q$ ved $x = -a$ blir $\left(k\dfrac{-2Q}{a}\right)\cdot Q = k\dfrac{-2Q^2}{a}$.

Når disse to ladningene er plassert er potensialet i $x = a$ lik $k\frac{-2Q}{a} + k\frac{Q}{2a} = -k\frac{3}{2}\frac{Q}{a}$ og energi for å plassere inn $+Q$ ved $x = -a$ er $\left(-k\frac{3}{2}\frac{Q}{a}\right) \cdot Q = -k\frac{3}{2}\frac{Q^2}{a}$. Dermed er total energi

$$U = k\frac{-2Q^2}{a} - k\frac{3}{2}\frac{Q^2}{a} = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Eller tredje mulighet, fra $U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i$ summert over alle tre ladningene og der V_i er totalt potensialet fra de to andre ladningene, dvs. ferdig oppbygd ladning:

$$U = \frac{1}{2}k\left[Q\left(\frac{-2Q}{a} + \frac{Q}{2a}\right) + (-2Q)\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{a}\right) + Q\left(\frac{-2Q}{a} + \frac{Q}{2a}\right)\right] = \frac{kQ^2}{2a}\left[-2 + \frac{1}{2} - 4 - 2 + \frac{1}{2}\right] = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Oppgave 3. Gauss' lov

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ: $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\mathrm{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir for $r \in [a, b]$:

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \lambda\ell \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \underline{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}}}\ .$$

(For alle andre r er $\vec{E} = \vec{0}$.)

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = \underline{-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{a}{b}}$$

der vi har integrert radielt slik at $\mathrm{d}\vec{s} = \hat{\mathbf{r}}\ \mathrm{d}r$.

Nå er $V(b) = 0$ og idet $b > a$ og $\lambda > 0$ får vi at $V(a) > 0$. Et positivt ladd legeme har alltid høyere potensial enn et negativt.

c) Elektrisk feltstyrke er lik minus gradienten til oppgitt potensial. Med gradienten i sylinderkoordinater (fra formelark, ingen ϕ og z-avhengighet), får vi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0\frac{b-r}{b-a}\right)\hat{\mathbf{r}} = \underline{V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}}\ .$$

d) Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater (formelark) får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{V_0}{b-a}\right) = \underline{\frac{\epsilon_0\,V_0}{r(b-a)}}\ .$$

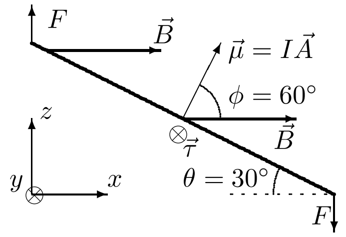
Uten bruk av divergens, kan man bruke Gauss' lov med sylindersymmetri: $\epsilon_0 E(r) \cdot 2\pi r \cdot \ell = Q_{\mathrm{encl}} = \int_a^r \rho(r) \cdot 2\pi r \cdot \ell \cdot \mathrm{d}r$. Forkorter $2\pi\ell$, setter inn $E(r)$ fra a) og deriverer:

$$\epsilon_0 V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot r = \int_a^r \rho(r) \cdot r \cdot \mathrm{d}r \quad \overset{\text{deriv.}}{\Rightarrow} \quad \epsilon_0 V_0 \cdot \frac{1}{b-a} = \rho(r) \cdot r \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\epsilon_0\,V_0}{r(b-a)}$$

Oppgave 4. Magnetisme

a)

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_{\text{sløyfe}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = B\cos 60^\circ A \\ &= 1,50\,\mathrm{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,020\,\mathrm{m}^2 = 15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tm}^2 = \underline{15\,\mathrm{mWb}}.\end{aligned}$$



Her er $A = ab$ er arealet av strømsløyfa og $\phi = 60^\circ - \theta = 60^\circ$ er vinkelen mellom B-feltet og flatenormalen $\vec{A}$. (OBS: Hold orden på 60° og 30° i oppstillingen!)

b) $\vec{\mu} = I\vec{A}$ der $\vec{A}$ er flatenormalen. Retningen altså langs flatenormalen, dvs. i xz-plan, 30° med z-aksen og 60° med x-aksen, med verdi

$$\underline{\mu = Iab = 5,00\,\mathrm{A}\cdot 0,020\,\mathrm{m}^2 = 0,100\,\mathrm{Am}^2}.$$

c) Kraftmomentet beregnes enklest fra $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$ (oppgitt på formelark):

$$|\vec{\tau}| = \tau = \mu B\sin 60^\circ = 0,10\,\mathrm{Am}^2\cdot 1,5\,\mathrm{T}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,1299\,\mathrm{Am}^2\cdot\mathrm{N/(Am)} = \underline{0,130\,\mathrm{Nm}},$$

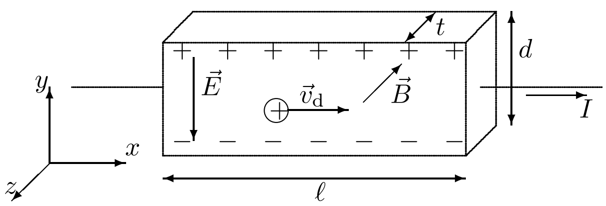
med retning $\hat{\mathbf{j}}$ ifølge høyrehåndsregelen. Alternativt kan momentet beregnes fra arm x kraft for de to kortsidene, der krafta $F = IbB$ går i + og - z-retning (inntegnet i figuren) og effektiv arm er $a/2\cdot\sin 60^\circ$:

$$\vec{\tau} = 2\cdot\vec{r}\times\vec{F} \quad\Rightarrow\quad \tau = 2\cdot a/2\cdot IbB\cdot\sin 60^\circ \qquad \text{(som over)}.$$

Oppgave 5. Hallprobe

a) Strømmen og ladningene går i positiv x-retning. Magnetfeltet går i negativ z-retning. Med vektornotasjon, der v_d og B er regnet positive, får vi $\vec{v}_\mathrm{d} = v_\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{i}}$ og $\vec{B} = -B\,\hat{\mathbf{k}}$. Dette gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_\mathrm{B} = q\vec{v}_\mathrm{d}\times\vec{B} = e\cdot v_\mathrm{d}\cdot B\,\hat{\mathbf{i}}\times(-\hat{\mathbf{k}}) = ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}}.$$



Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E-felt retning nedover: $\underline{\vec{E} = -E\,\hat{\mathbf{j}}}$ (vist i figuren). Potensialforskjellen $V_\mathrm{H} = E\cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_\mathrm{E} = e\cdot\vec{E} = -eE\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_\mathrm{E} + \vec{F}_\mathrm{B} = -eE\,\hat{\mathbf{j}} + ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}} = \vec{0} \quad\Rightarrow\quad E = v_\mathrm{d}B, \quad \text{og altså} \quad \underline{V_\mathrm{H} = E\cdot d = v_\mathrm{d}Bd} \quad \text{(med høyest potensial øverst).}$$

b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_d for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_\mathrm{d}\cdot t\,d \quad\Rightarrow\quad v_\mathrm{d} = \frac{I}{n\,q\,t\,d}\left(= \frac{0,15\,\mathrm{A}}{5,0\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 625\,\mathrm{m/s}\right).$$

Fra uttrykk for V_H ser vi at magnetfeltet da er

$$B = \frac{V_\mathrm{H}}{v_\mathrm{d}d} = \frac{V_\mathrm{H}}{I}\cdot n\,q\,t = \frac{6,5\,\mathrm{V}}{0,15\,\mathrm{A}}\cdot 5\cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,15\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{0,52\,\mathrm{T}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 19. aug. 2016.