Eksamen 16. mai 2017. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rett svar:	D	A	C	C	B	D	B	E	D	D

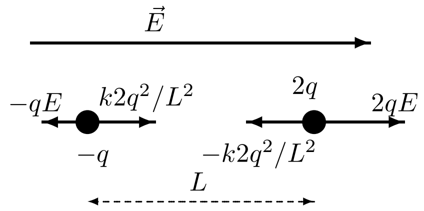
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Rett svar:	D	E	D	D	A	C	D	E	C	E	A	D

Detaljer om spørsmålene:

1-1. D. Newtons lov – kraft er lik motkraft! (Coulombs lov gir størrelsen $F = \dfrac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$).

1-2. A. Den positive staven induserer positive ladninger på høyre kule og negative på venstre kule. Ladningen opprettholdes når de skilles fra hverandre.

1-3. C. Siden partiklene har samme masse har vertikal bevegelse ingen betydning (de faller like mye). Skal den horisontale avstanden L mellom dem beholdes må de påføres samme kraft slik at de får den samme horisontale akselerasjonen. Kreftene er internkrefter mellom ladningene pluss kraft pga. feltet E. Med positiv kraftretning mot høyre , får vi med $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$



$$F_{-q} = F_{2q} \qquad \Rightarrow \quad -qE + k\frac{q\,2q}{L^2} = 2qE - k\frac{q\,2q}{L^2} \qquad \Rightarrow \quad E = \frac{4}{3}k\frac{q}{L^2} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0}\frac{q}{L^2}$$

1-4. C. Pkt. 1 har parvis like store avstander til en positiv og en negativ ladning. Samme for pkt. 2, derfor er $V_1 = V_2 = 0$. Videre har vi høyt potensial i nærheten av en positiv ladning og lavt potensial i nærheten av en negativ ladning. Dermed må vi ha $V_4 < 0$ og $V_3 > 0$.

1-5. B. E-feltet er alltid null inni lederen, slik at rett svar må være 2 eller 3. Siden vi har større permittivitet i plasten enn i vakuum, vil E-feltet være mindre der enn utenfor. Det vil falle som $1/r^2$ i begge områder.

1-6. D. Feltfritt inne i metall medfører at ei gaussflate som ligger inni hvert metallskall skal ha total null nettoladning innenfor. For at ei Gaussflate i ytterste metallskall skal ha null nettoladning innenfor, må nettoladningen $-Q$ på skallet legge seg på innsida av dette skallet. Da blir det ingen ladning igjen til ytre overflate.

1-7. B. $P_2 = \chi_{e,2}\,\epsilon_0\,E_2 = 7\epsilon_0 \cdot D/(8\epsilon_0) = 7\sigma_0/8$ der vi har brukt at $\chi_{e,2} = \epsilon_{r,2} - 1 = 7$ og at den elektriske flukstetthet $D = \sigma_0$ (den samme i hele volumet mellom metallplatene).

1-8. E. Da spenningsforsyning er kopla fra er ladningen Q konstant. Kapasitansen øker slik at spenning $V = Q/C$ og $E = V/d$ avtar.

1-9. D. Effekten i ei pære er gitt ved $P = VI = V^2/R = RI^2$ der R er resistansen. Ved normal parallellkopling av lyspærene er det over hver pære samme spenningen, V. Dette gir effektene for parallelkoplede pærer

$$P_{25}^{(\mathrm{P})} = \frac{V^2}{R_{25}} \quad \text{og} \quad P_{60}^{(\mathrm{P})} = \frac{V^2}{R_{60}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{25}}{R_{60}} = \frac{P_{60}^{(\mathrm{P})}}{P_{25}^{(\mathrm{P})}} = \frac{60}{25}.$$

I seriekopling blir spenningen V fordelt over de to pærene, men strømmen I må være lik for begge. Dette gir at effekten i hver pære ved seriekopling blir

$$P_{25}^{(\mathrm{S})} = R_{25}I^2 \quad \text{og} \quad P_{60}^{(\mathrm{S})} = R_{60}I^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{P_{25}^{(\mathrm{S})}}{P_{60}^{(\mathrm{S})}} = \frac{R_{25}}{R_{60}} = \frac{60}{25}}.$$

1-10. D. Når bryteren er åpen går det ingen strøm og dermed er det ingen potensialdifferanse over motstandene. Da er $V_A - V_B = 30$ V. C. Når bryteren er lukket går det strøm $I = 30\,\mathrm{V}/(100\,\Omega + 200\,\Omega) = 0,10\,\mathrm{A}$. Spenningen over høyre motstand (mellom A og B) er da $\Delta V = I \cdot 200\,\Omega = 20\,\mathrm{V}$.

1-11. D. Parallellkoplingen av C og $3C$ har kapasitans $C_p = C + 3C = 4C$. Total kapasitans gitt av $\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_p}$ som gir $C_{tot} = 4C/5$. Da er ladningen på totalkondensatoren $Q_{tot} = V_0\,C_{tot} = 4V_0C/5$. For seriekoplingen C og C_p vil ladningen være lik Q_{tot}, og denne Q_{tot} vil fordele seg med 3/4 på $3C$ og 1/4 på C, slik at ladningen på kondensatoren $3C$ er $3/4 \cdot 4V_0C/5 = 3V_0C/5$.

1-12. E. Netto magetisk kraft på ei lukka strømsløyfe i et homogent magnetfelt er alltid null. Matematisk: $\vec{F} = \oint I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B} = (\oint \mathrm{d}\vec{s}) \times (I\vec{B}) = \vec{0} \times (I\vec{B}) = \vec{0}$.

1-13. D. Resultantkraft = Lorentzkrafta = $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Skal denne være null må $\vec{v} \times \vec{B}$ ha retning motsatt $\vec{E}$, dvs. i negativ x-retning. Da må $\vec{v}$ ha retning i positiv z-retning, etter høyrehåndsregelen.

1-14. D. Sentripetalakselerasjon: $F = mv^2/r$. Magnetisk kraft: $F = qvB$. Disse satt like gir $r = mv/(qB)$.

1-15. A. $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$, høyre leder: $I\ell\hat{\mathbf{j}} \times B\hat{\mathbf{k}} \propto \hat{\mathbf{i}}$ venstre leder: $I\ell(-\hat{\mathbf{j}}) \times B\hat{\mathbf{k}} \propto -\hat{\mathbf{i}}$.

1-16. C. En regulær sekskant med sidekant a er like seks trekanter med sidekant a og $60°$ vinkler, dvs. sekskantens areal er $A = 6 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \sin 60° = 3 \cdot a^2 \cdot 0,866$. Dermed er magnetisk moment $\mu = IA = 1,00 \cdot 3 \cdot 1,00\,\mathrm{cm}^2 \cdot 0,866 = 2,60\,\mathrm{Acm}^2$.

1-17. D. Ifølge høyrehåndsregelen vil B-feltet mellom ledningene være i negativ z-retning fra begge ledningene, og sterkere jo nærmere en ledning. Utenfor ledningene er retningen i positiv z.

1-18. E. Etter lang tid er $\dot{I} = 0$ og derfor ingen spenningsfall over en spole (dvs. som en kortslutning). En kondensator er fullt oppladet og det går ingen strøm (dvs. som åpen krets). Kretsen er da ekvivalent med en seriekopling av 50,0 Ω og 25,0 Ω-motstanden. Strømmen blir $I = V_0/(\Sigma R) = 200,0\,\mathrm{V}/75,0\,\Omega = 2,667\,\mathrm{A}$. Spenningen over 70 μF-kondensatoren er lik spenningen over 50 Ω-motstanden, dvs. $2,667\,\mathrm{A} \cdot 50\,\Omega = 133,3\,\mathrm{V}$.

1-19. C. Kirchhoffs spenningsregel gir $V_0 e^{i\omega t} = L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, slik at $I(t) = V_0/i\omega L e^{i\omega t}$ dvs. amplitude $I_0 = V_0/\omega L = V_0/(2\pi f L) = 50 \cdot 10^{-3}/(2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-6})\,\mathrm{A} = 3,18\,\mathrm{A}$.

1-20. E. Ingen sanne.

1-21. A. Middelverdien av S er gjennomsnittlig effekt per areal i bølgen - gitt i formellista som intensitet ($\mathrm{W/m^2}$). Dermed er effekten på flata $P = S\,A = 0,944\,\mathrm{W/m^2} \cdot 1,5 \cdot 2,0\,\mathrm{m^2} = 2,832\,\mathrm{J/s} = 169,9\,\mathrm{J/min}$.

1-22. D. Fra formelark er strålingstrykket på en svart flate: $p_{\text{svart}} = \langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{1,4\cdot 10^3\,\mathrm{W/m^2}}{2,998\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 4,67 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}$. Kraft: $F = p_{\text{svart}}\,A = 4,67 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2} \cdot 5,0\,\mathrm{m^2} = 23,4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$.

Oppgave 2. Elektrisk felt.

a) Utenfor kula: Ladningen innenfor ei Gausskule med radius r er lik Q slik at Gauss' lov gir

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\vec{E}(r \geq a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}}\,.$$

Inni kula: Ladningen innenfor ei Gausskule med radius r er lik

$$Q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = Q \cdot \frac{r^3}{a^3}\,,$$

slik at ved bruk av Gauss' lov som ovenfor er

$$\vec{E}(r \leq a) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q \cdot \frac{r^3}{a^3}}{4\pi r^2}\hat{r} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}}\hat{r} = \underline{Ar\hat{r}}. \qquad \left(\text{dvs. oppgitt } A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}\right). \tag{1}$$

b)

$$V(r \geq a) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^r E(r \geq a) \cdot \mathrm{d}r = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}\,.$$

Merk spesielt:

$$\vec{E}(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{r}\,, \quad V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\,.$$

Inni kula:

$$V(r \leq a) = V(a) - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}\frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right) = \underline{\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)}.$$

Noen har brukt $V(r) = \int_0^a \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 r}$ men det blir ikke rett da i denne formelen er r avstanden fra punktet vi angir V til ladningen $\mathrm{d}q$, som ikke er lik avstand r fra sentrum av kula.

c) Energi:

$$U = \frac{1}{2}\iiint V(r)\mathrm{d}q \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^a V(r) \cdot \rho 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \qquad (q = 0 \text{ for } r \geq a)$$

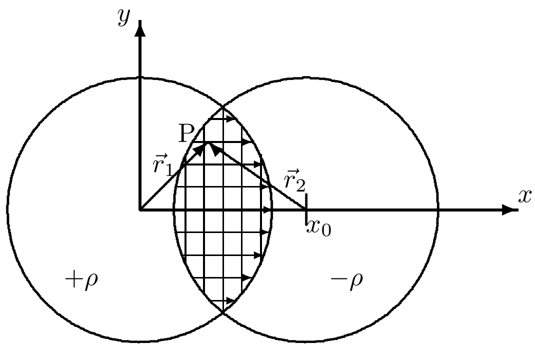
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3\,Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^4}\int_0^a \left(3-\frac{r^2}{a^2}\right) r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3\,Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^4}\left(a^3-\frac{1}{5}\cdot\frac{a^5}{a^2}\right) = \frac{3\,Q^2}{16\pi\epsilon_0 a}\frac{4}{5} \quad = \quad \underline{\frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a}}.
\end{aligned}
$$

Mange har brukt $U = \frac{1}{2}QV(a)$ som bare gjelder når all ladning Q er samla på samme potensial $V(a)$. Det vil gjelde for ladd kuleskall, men ikke her da ladningen $\mathrm{d}q$ er plassert ved ulike potenisal $V(r)$.
Alternativ beregning fra energi i elektrisk felt i hele rommet:

$$
\begin{aligned}
U &= \iiint \frac{1}{2}DE\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0 \iiint E^2\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}\right)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r + \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\left(\int_0^a \frac{r^4}{a^6}\mathrm{d}r + \int_a^\infty r^{-2}\mathrm{d}r\right) \\
&= \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right) \quad = \quad \underline{\frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a}}.
\end{aligned}
$$

Med denne metoden har mange glemt å ta med integrasjonen $\int_a^\infty$ utenfor kula og fått bare første integral, som gir $\frac{1}{40}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$.

d) Horisontale $\vec{E}$-feltlinjer. Vertikale ekvipotensialflater ($\perp$ E-feltlinjene). Se figuren.



e) Feltet i P er lik sum av felt fra hver kule. Med motsatt romladning og samme størrelse vil kulene ha ladning henholdsvis Q og $-Q$. Det er lurt å brukte oppgavetipset $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}$, og med dette kan feltene fra likn. (1) uttrykkes

$$
\vec{E}_1 = Ar_1\hat{r}_1 = A\vec{r}_1 \qquad \vec{E}_2 = -Ar_2\hat{r}_2 = -A\vec{r}_2
$$

der $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er som gitt i figuren. Totalfeltet er

$$
\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \underline{Ax_0\,\hat{\mathbf{i}}} = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_0}{a^3}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.
$$

idet vi ser fra figuren at $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = x_0\,\hat{\mathbf{i}}$. Feltet er altså horisontalt og homogent, og påstanden i **d)** var altså korrekt. Dette gjelder i hele område III, ikke bare på midtnormalen, som mange hadde kommet fram til.

Interessant å observere at $E \propto x_0$, dvs. sterkest felt (men lite område) når x_0 er stor. Merk krav for overlapp: $x_0 < 2a$. Merk at homogent og horisontalt E-felt ikke er noen tilnærming, men eksakt!

Oppgave 3. Magnetfelt.

a) I en tynn ring med radius r og tykkelse $\mathrm{d}r$ går det en strøm $\mathrm{d}I = \mathrm{d}q/T$, der $\mathrm{d}q$ er ladningen som passerer et visst punkt på ringen i en viss tid T. Et fornuftig valg er $T = 2\pi/\omega$ lik tida skiva bruker på en omdreining (dvs. perioden) og $\mathrm{d}q = \sigma(r)\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r$ lik ladningen på hele den tynne ringen. En slik tynn strømring har da strøm

$$
\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\sigma(r)\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r}{2\pi/\omega} = \sigma_0\omega b^2\frac{\mathrm{d}r}{r}.
$$

For magnetisk moment $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I\,A$ er A arealet som strømsløyfa $\mathrm{d}I$ omslutter. Her er da $A = \pi r^2$. (Flertallet har brukt $\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r$ her som er feil - og dessuten gir andre ordens differensial!) Det magnetiske momentet for strømsløyfa med strøm $\mathrm{d}I$ er da

$$
\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I\cdot \pi r^2 = \sigma_0\omega b^2\pi r\mathrm{d}r
$$

og skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$
\mu = \int_a^b \mathrm{d}\mu = \int_a^b \sigma_0\omega b^2\pi r\mathrm{d}r = \underline{\frac{1}{2}\sigma_0\omega b^2\pi(b^2 - a^2)}\,.
$$

Retningen er normal på strømsløyfa etter høyrehåndsregelen, dvs. $\vec{\mu} = \mu\,\hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z-akse hvis $\sigma_0 > 0$).

b) Vi kan bruke det oppgitte uttrykket for B til å skrive ned magnetfeltet $\mathrm{d}B$ fra en tynn ring med radius r, tykkelse $\mathrm{d}r$ og strøm $\mathrm{d}I$:

$$\mathrm{d}B = \mu_0 \frac{\mathrm{d}I\, r^2}{2(z^2+r^2)^{3/2}}\,.$$

Innsetting av $\mathrm{d}I = \sigma_0 \omega b^2 \frac{\mathrm{d}r}{r}$ ovenfra og integrasjon over skiva ved bruk av oppgitt integral, gir

$$B(z) = \frac{\mu_0\sigma_0\omega b^2}{2}\int_a^b \frac{r\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma_0\omega b^2}{2}\left[\frac{-1}{(z^2+r^2)^{1/2}}\right]_a^b = \underline{\frac{\mu_0\sigma_0\omega b^2}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}\right]}.$$

Etter høyrehåndsregelen er retningen $\vec{B}(z) = B(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z-akse hvis $\sigma_0 > 0$).

Oppgave 4. Elektromagnetisk induksjon.

a) Bevegelsen induserer en ems: $\mathcal{E} = \dot{\Phi} = B\dot{A} = B\ell v(t)$ som ifølge Ohms lov genererer strømmen

$$I = \mathcal{E}\frac{1}{R} = \underline{B\ell v(t)\frac{1}{R}}.$$

b) Denne strømmen i staven gir en Lorentzkraft på staven:

$$F = -BI\ell = -B\left(B\ell v(t)\frac{1}{R}\right)\ell = \underline{-B^2\ell^2 v(t)\frac{1}{R}} \qquad (2)$$

som virker mot bevegelsen, derfor minus. (Oppgaveteksten kunne presisert bedre at vi skulle finne F pga. strømmen I, og ikke kraft langs staven pga. bevegelsen.)

c) Krafta bremser ned hastigheten etter Newton 2:

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = -B^2\ell^2 v(t)\frac{1}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v(t)\mathrm{d}t = -\frac{Rm}{B^2\ell^2}\mathrm{d}v = -\tau\ \mathrm{d}v,$$

der vi har innført $\tau = \dfrac{Rm}{B^2\ell^2}$. Enkel omskriving og integrasjon gir

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{\mathrm{d}v}{v(t)} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{t}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v(t) = v_0 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}}.$$

Veldig mange har ikke fått med minustegnet og fått en løsning $v(t) = v_0 \exp\left\{+\frac{t}{\tau}\right\}$. En eksponential voksende v er totalt ufysikalsk!

Oppgave 5. Kondensator med ladningstap.

a) Utladningen er som en RC-krets som har tidskonstant $\tau = RC$. Uttrykk for C oppgitt (eller formelark) og uttrykk for R fra formelark gir

$$\tau = RC = \rho\frac{d}{A}\cdot\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\frac{A}{d} = \rho\cdot\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 = 2,0\cdot 10^{12}\,\Omega\,\mathrm{m}\cdot 8,00\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} = 141,6\,\mathrm{s} = \underline{142\,\mathrm{s}}.$$

Enhetskontroll: $\Omega\cdot\mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s}$.

De fleste vil nok ha behov for å beregne $\tau = RC$. Denne bestemmes ved å løse differensiallikningen for ladningen $Q(t)$. Nå er $Q = CV = CRI$ (definisjonen av kapasitans og Ohms lov). Strømmen er $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ med positiv strøm mot høyre (Q avtar). Dermed

$$Q = -CR\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{CR}\mathrm{d}t$$

som integrert fra $Q(0) = Q_0$ til $Q(t)$ gir

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{1}{CR}t \qquad \Rightarrow \qquad Q(t) = Q_0\exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\} = Q_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}.$$

b) Forskyvningsstrømmen er $I_\mathrm{d} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ der Φ er elektrisk fluks mellom kondensatorplatene. Fra Gauss lov (eller velkjent fra før) får vi $\Phi = DA = Q$ = ladning på kondensatoren og dermed

$$I_\mathrm{d}(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_0}{\tau}\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}.$$

Ladningen $Q(t)$ avtar slik at I_d er negativ, dvs. <u>retning mot venstre</u>. Ved $t = 120$ s er

$$I_\mathrm{d}(120\,\mathrm{s}) = -\frac{10\,\mu\mathrm{C}}{141,6\,\mathrm{s}}\exp\left\{-\frac{120}{141,6}\right\} = -30,26\,\mathrm{nA} = \underline{-30\,\mathrm{nA}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 23. mai 17.