FY1003 Elektr. & magnetisme

Eks. 12. aug. 2017 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rett svar:	C	D	E	D	C	E	D	E	E	C
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18		
Rett svar:	C	B	D	A	C	C	B	A		

Detaljer om spørsmålene:

1-1. C. La $F = kq^2/a^2$ der $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ og a er sidekant i kvadratet, diagonalen er da $a\sqrt{2}$. Tiltrekkende kraft mot venstre: F. Tiltrekkende kraft nedover: $3F$. Frastøtende kraft på skrå oppover mot høyre: $F \cdot 2\sqrt{2}/(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\,F$, med horisontalkomponent og vertikalkomponenter begge $\sqrt{2}F \cdot \sin\pi/4 = F$. Resultantkrafta er da null horisontalkomponent og vertikalkomponent $2F$ retta nedover. Dermed pil C.

1-2. D. Potensialet er høyest nærme den positive ladningen og lavest nær den negative, null midt i mellom.

1-3. E. $Q = CV = \epsilon_r\epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

1-4. D. Begge har potensial $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ på overflata. For kule 1 er all ladning ved dette potensial og $U_1 = \frac{1}{2}V(R)Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$, som oppgitt. For kule 2 er ladningen fordelt på gradvis stigende potensial $V(r)$ innover i kula, den må derfor ha høyere totalenergi $U_2 = \int_{\text{kule}} \frac{1}{2}V(r)\mathrm{d}q > \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$. Alle alternative uttrykk inneholder $\frac{Q^2}{R}$, og vi ser at det er kun alternativet D som har $U_2 > U_1$: $3/20 > 1/8$. Trenger altså ikke gjøre vidløftige utregninger.

1-5. C. $\vec{D}$ forandrer seg ikke ved grenseskillet da det ikke er frie ladninger der: 3 riktig
$\vec{P}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er størst, dvs. i øvre lag: 1 er riktig.
$\vec{E}$ er størst (2x så stor) der relativ permittivitet ϵ_r er minst, dvs. i nedre lag: 2 er riktig.

1-6. E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B-feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

1-7. D. De to parallellkretsene har ingen vekselvirkning med hverandre, dvs. svar er uavhengig av høyre delkrets. Venstre kondensator har spenning $V_0 = 9,0\,\mathrm{V}$, kapasitans $C_6 = 6\,\mu\mathrm{F}$ og dermed ladning $Q_6 = C_6 \cdot V_0 = 54\,\mu\mathrm{C}$.

1-8. E. Magnetisk kraft $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ er null når farten er null.

1-9. E. Ifølge høyrehåndsregelen vil H-feltet ha samme retning fra de to ledningene mellom ledningen (normalt på papirplanet). Utenfor hver av ledningen vil H være i motsatt retning, men den nærmeste ledningen gir sterkest H-felt.

1-10. C. Under bevegelsen avtar magnetfluksen nedover, ifølge Lenz' lov induseres strøm som opprettholder fluksen nedover, dvs. med klokka. Indusert spenning er $V = \mathcal{E} = \dot{\Phi}_B = B\dot{A} = BLv$ og strøm $I = V/R = BLv/R = 1,50\,\mathrm{T} \cdot 1,00\,\mathrm{m} \cdot 2,0\,\mathrm{m/s}\,/20,0\,\Omega = 0,15\,\mathrm{A}$.

1-11. C. Magnetfeltet B har inni strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel) og øker med tida idet I øker. Den magnetiske fluks Φ_B øker altså nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som gir en magnetisk fluks oppover, ergo må strømretningen være mot klokka. I avstand r fra rett leder er $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ og Faradays lov gir (integral over sløyfa) $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial\Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int B\,\mathrm{d}A = -\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\partial I}{\partial t}\displaystyle\int\dfrac{b\mathrm{d}r}{r}$, altså prop. med $\frac{\partial I}{\partial t} = k$.

1-12. B. Magnetfeltet B har rundt strømsløyfa retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel). Under bevegelsen reduseres sløyfas magnetiske fluks Φ_B nedover, og ifølge Lenz' lov induseres en sløyfestrøm som opprettholder fluks nedover, ergo må strømretningen være med klokka. Strøm mot høyre i øvre del gir tiltrekking til den rette lederen med strøm i samme retning, mens strøm mot vensre i nedre del gir frastøtning.

1-13. D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

1-14. A. Innenfor en tenkt sirkel Γ med radius r vil med tida fluksen Φ_B øke nedover. Det vil da induseres en ems. som ville gi en strøm mot klokka, fordi da induseres B_{ind} oppover som motvirker økende Φ_B (Lenz' lov). Da vil i pkt. a $\vec{E}$ har retning mot venstre, negativ x-retning.

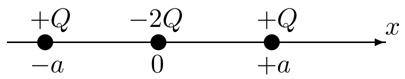
1-15. C. Strømampl. $|I| = |V|/|Z|$ der impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$. Pga. leddet $1/(i\omega C)$ (og altså kapastitansen) får Z svært stor verdi og strømamplituden veldig liten verdi når $\omega \to 0$.

1-16. C. For seriekopling er $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Her er $Z_1 = Z_2 = \dfrac{1}{i\omega C}$ og (parallellkopling) $\dfrac{1}{Z_3} = 3\dfrac{1}{1/i\omega C} = 3i\omega C$. Dermed er $Z = \dfrac{2}{i\omega C} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{i\omega C} = \dfrac{7}{3}\dfrac{1}{i\omega C}$.

1-17. B. Sammenliknet med formen $E_0 \sin(kx + \omega t)$ ser vi at $\omega = 2,4 \cdot 10^6\,\pi \cdot 3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$og $f = \omega/(2\pi) = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 10^6 \cdot 3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{s}^{-1} = 3,6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$.

1-18. A. $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ og $u_B = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\,\epsilon_0 c^2 \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = u_E$.

Oppgave 2. Punktladninger



a) Elektrisk felt på x-aksen for én punktladning i $x = 0$ er $\vec{E}(x) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}} = k\frac{Q}{x^2}\,\hat{\mathbf{i}}$. For disse tre punktladninger når $x > a$:

$$\underline{\vec{E}(x) = k\left(\frac{Q}{(x+a)^2} + \frac{-2Q}{x^2} + \frac{Q}{(x-a)^2}\right)\hat{\mathbf{i}}} \tag{1}$$

evt. sammenfattet til én brøk (ikke påkrevd):

$$\begin{aligned} E(x) &= kQ\frac{x^2(x-a)^2 - 2(x+a)^2(x-a)^2 + (x+a)^2x^2}{x^2(x+a)^2(x-a)^2} \\ &= kQ\frac{x^4 - 2x^3a + x^2a^2 - 2(x^4 - 2x^2a^2 + a^4) + x^4 + 2x^3a + x^2a^2}{x^2(x^2-a^2)^2} \\ &= kQ\frac{6x^2a^2 - 2a^4}{x^2(x^2-a^2)^2} = \underline{kQ\frac{2a^2(3x^2-a^2)}{x^2(x^2-a^2)^2}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Kan beregnes på ulike måter. Det enkleste er å summere energi parvis over ladningene og bruke oppgitt $V(r) = kQ/x$ for punktladning. Potensialet (energi per ladning) i $x = 0$ fra ladningen Q i $x = -a$ er kQ/a, slik at energien mellom de to ladningene i $x = -a$ og $x = 0$ er $k\frac{Q\,(-2Q)}{a}$. Osv. for de to andre parene gir totalt

$$U = k\left(\frac{Q\,(-2Q)}{a} + \frac{Q\,Q}{2a} + \frac{(-2Q)\,Q}{a}\right) = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Eller ved å beregne energien ved å plassere inn én og én ladning. Første ladning, la oss velge $-2Q$, plasseres inn gratis uten energi. Etter plasseringen er potensialet i $x = -a$ lik $k\dfrac{-2Q}{a}$. Potensial i et punkt er energi per ladning, slik at energi for å plassere inn påfølgende $+Q$ ved $x = -a$ blir $\left(k\dfrac{-2Q}{a}\right) \cdot Q = k\dfrac{-2Q^2}{a}$.

Når disse to ladningene er plassert er potensialet i $x = a$ lik $k\dfrac{-2Q}{a} + k\dfrac{Q}{2a} = -k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{a}$ og energi for å plassere inn $+Q$ ved $x = -a$ er $\left(-k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{a}\right) \cdot Q = -k\dfrac{3}{2}\dfrac{Q^2}{a}$. Dermed er total energi

$$U = k\frac{-2Q^2}{a} - k\frac{3}{2}\frac{Q^2}{a} = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

Eller tredje mulighet, fra $U = \frac{1}{2}\sum q_i V_i$ summert over alle tre ladningene og der V_i er totalt potensialet fra de to andre ladningene, dvs. ferdig oppbygd ladning:

$$U = \frac{1}{2}k\left[Q\left(\frac{-2Q}{a} + \frac{Q}{2a}\right) + (-2Q)\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{a}\right) + Q\left(\frac{-2Q}{a} + \frac{Q}{2a}\right)\right] = \frac{kQ^2}{2a}\left[-2 + \frac{1}{2} - 4 - 2 + \frac{1}{2}\right] = \underline{-\frac{7}{2}k\frac{Q^2}{a}}.$$

c) Når $x \gg a$ vil vi fra uttrykket (2) få

$$\vec{E}(x \gg a) \approx kQ\,\frac{2a^2 \cdot 3x^2}{x^6}\,\hat{\mathbf{i}} = \underline{kQ\,\frac{6a^2}{x^4}\,\hat{\mathbf{i}}},$$

Dersom du bruker uttrykket (1) må du skrive litt om:

$$E(x) = k\left(\frac{Q}{(x+a)^2} + \frac{-2Q}{x^2} + \frac{Q}{(x-a)^2}\right) = k\frac{Q}{x^2}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-2} - 2 + \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-2}\right].$$

Bruk av den oppgitte approksimasjonen gir

$$E(x) \approx k\frac{Q}{x^2}\left[1 - 2\frac{a}{x} + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 2 + 1 + 2\frac{a}{x} + 3\left(\frac{a}{x}\right)^2\right] = k\frac{Q}{x^2}\left[6\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]$$

I begge tilfeller er altså i oppgitt uttrykk konstanten $c = 6a^2$ og eksponenten $n = 4$.

Oppgave 3. Kulekondensator

a) Beregner først elektrisk flukstetthet $\vec{D}$, siden denne er uavhengig av dielektrisk materiale:
Gauss lov $\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\mathrm{encl}}$ mellom kuleskallene, $r \in [a, 3a]$, der $Q_{\mathrm{encl}} = Q$, gir

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\ .$$

Ellers i rommet er $Q_{\mathrm{encl}} = 0$ for Gaussflata slik at $\vec{D} = 0$ for $r \notin [a, 3a]$.

Dette gir

$$\vec{E}(r) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [a, 2a] \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & \Leftarrow r \in [2a, 3a] \\ \vec{0} & \Leftarrow r \notin [a, 3a]. \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} V(a) - V(3a) = -\int_{3a}^{a} \vec{E}(r)\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_{3a}^{2a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\int_{2a}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right)\right) \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\right) \end{aligned}$$

c) For $r \in [a, 2a]$ er

$$\vec{P}(r) = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0\frac{\vec{D}}{\epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\right)\vec{D} = \frac{\epsilon_{\mathrm{r}} - 1}{\epsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,.$$

Polariseringsvektor $\vec{P}$ peker i samme retning som $\vec{D}$ og $\vec{E}$, dvs. utover.

Oppgave 4. Magnetfelt

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \int_0^R J(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\, J_0\int_0^R\left(r - \frac{r^2}{R}\right)\cdot\mathrm{d}r = 2\pi\, J_0\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}\frac{R^3}{R}\right) = \frac{\pi}{3}\,J_0R^2\,. \end{aligned}$$

b) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\mathrm{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\mathrm{u}}(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r. Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3}J_0R^2\,,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$B_{\mathrm{u}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\pi}{3}\,J_0R^2 = \mu_0 J_0\frac{R^2}{6r}\,.$$

c) Inni lederen finner vi

$$
\begin{aligned}
I(r<R) &= \int_0^r J(r')\cdot 2\pi r'\mathrm{d}r' \\
&= 2\pi\, J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R}\right)\cdot \mathrm{d}r' = 2\pi\, J_0 \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}\frac{r^3}{R}\right) = \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R}\right).
\end{aligned}
$$

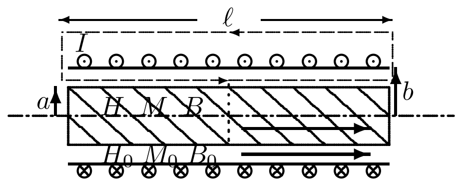
(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_u ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$
B_\mathrm{i}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\cdot I(r<R) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R}\right) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} r - \frac{\mu_0\, J_0}{3R} r^2
$$

Altså er

$$
\underline{C_1 = \frac{1}{2}\mu_0\, J_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{C_2 = -\frac{\mu_0\, J_0}{3R}}
$$

Oppgave 5. Magnetisk materiale.



a) Figuren viser et sidesnitt av solenoiden med jernkjernen. Strømmen I genererer feltstyrken H uavhengig av materialet inni solenoiden ($H = H_0$). Legger en Amperekurve som et rektangel med en sidekant (lengde ℓ) inni solenoiden og resten utenfor. Utenfor solenoiden tilnærmes $H = 0$ slik at $\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s}$ gir bidrag bare inni solenoiden:

$$
\oint \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = I \quad\Rightarrow\quad H\,\ell + 0 + 0 + 0 = I\,N \quad\Rightarrow\quad \underline{H = H_0} = I\,N/\ell = I\,n = 800\,\mathrm{m}^{-1}\cdot 3,50\,\mathrm{A} = \underline{2,80\,\mathrm{kA/m}}\,,
$$

der N er antall viklinger over solenoidens lengde ℓ.
Alle feltstørrelser peker mot høyre i solenoidens akseretning (høyrehåndsregel, fingre rundt solenoiden i strømretning og tommelen er vektorretningen). Vist med piler i figuren.
Merk at tangentkomponenten til $\vec{H}$ er alltid kontinuerlig over ei grenseflate.

b) Beregning av magnetiseringen fra den lineære relasjonen $M = \chi_\mathrm{m} H$ gir

$$
\begin{aligned}
M_0 &= (\mu_\mathrm{r} - 1)H = (1-1)\cdot H_0 = \underline{0\,\mathrm{A/m}}, \\
M &= (\mu_\mathrm{r} - 1)H = (2000-1)\cdot H_0 = 5,60\cdot 10^6\,\mathrm{A/m}.
\end{aligned}
$$

Men denne verdien for M er ikke mulig, da metning M_s inntrer ved en lavere verdi som oppgitt. Magnetiseringen vil derfor bli

$$
\underline{M = M_\mathrm{s} = 1,56\cdot 10^6\,\mathrm{A/m}.}
$$

Verdier for magnetisk flukstetthet fra $B = \mu_0(H+M)$:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \mu_0(H_0 + 0) = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}\cdot 2800\,\mathrm{A/m} = \underline{3,52\,\mathrm{mT}}, \\
B &= \mu_0(H + M_\mathrm{s}) = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}\cdot(2,80 + 1560)\cdot 10^3\,\mathrm{A/m} = \underline{1,96\,\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Verdi for B hvis vi bruker oppgitt permeabilitet blindt og ikke bruker begrensing i metningsmagnetisering:
$B' = \mu_\mathrm{r}\cdot\mu_0 H = 2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tm/A}\cdot 2800\,\mathrm{A/m} = 7,04\,\mathrm{T}$. Dette svaret er altså ikke riktig.

c)

$$
u_{B,0} = \frac{1}{2}B_0 H_0 = \frac{1}{2}\cdot 3,52\,\mathrm{mT}\cdot 2,80\,\mathrm{kA/m} = 4,928\,\mathrm{TA/m} = 4,93\,\mathrm{J/m^3}
$$

$$
u_B = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\cdot 1,96\,\mathrm{T}\cdot 2,80\,\mathrm{kA/m} = 2,744\,\mathrm{kTA/m} = 2,75\,\mathrm{kJ/m^3}.
$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 14. aug. 2017.