

**(1)**

En TV-stasjon sender ut et sinussignal med en effekt på 316 kW. Anta at bølgen brer seg uniformt ut i en halvkule over bakken. Betrakt så et hus 5.00 km unna antenna.

- (a) Hva er det gjennomsnittlige trykket den elektromagnetiske bølgen utgjør på en fullstendig reflekterende overflate på huset?

**Løsning:** For å finne strålingstrykket må vi først regne ut intensiteten til bølgen 5 km unna antenna. Intensiteten er effekt per arealenheter, så vi må dividere den totale effekten på overflatearealet til halvkula. Vi får

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{316 \text{ kW}}{2\pi(5000 \text{ m})^2} = 0.00201 \text{ W/m}^2.$$

Strålingstrykket ved huset er da

$$p_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \cdot (0.00201 \text{ W/m}^2)}{2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1.34 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}.$$

Her måtte vi bruke  $p_{\text{rad}} = 2I/c$  i motsetning til  $p_{\text{rad}} = I/c$  siden vi betrakter en fullstendig reflekterende overflate.

- (b) Hva er amplitudene til det elektriske og magnetiske feltet ved huset?

**Løsning:**  $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\text{max}}^2$  gir

$$E_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (0.00201 \text{ W/m}^2)}{(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s})}} = 1.23 \text{ N/C}.$$

Fra  $E_{\text{max}} = cB_{\text{max}}$  får vi

$$B_{\text{max}} = \frac{E_{\text{max}}}{c} = \frac{1.23 \text{ N/C}}{2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 4.10 \cdot 10^{-9} \text{ T}.$$

- (c) Hva er den gjennomsnittlige energitettheten til bølgen ved huset?

**Løsning:**  $u = \epsilon_0 E^2$ , så  $u_{\text{av}} = \epsilon_0 (E_{\text{av}})^2$  og  $E_{\text{av}} = \frac{E_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ , så vi får

$$u_{\text{av}} = \frac{\epsilon_0 E_{\text{max}}^2}{2} = \frac{(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(1.23 \text{ N/C})^2}{2} = 6.69 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3.$$

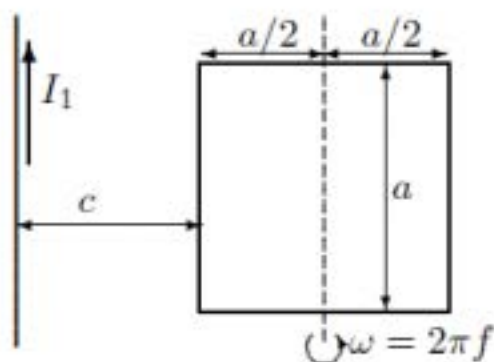
- (d) Hvilken prosentandel av energitettheten i (c) kommer fra henholdsvis det elektriske og det magnetiske feltet?

**Løsning:** Energitettheten er den samme for det elektriske og magnetiske feltet, så hver av dem bidrar med 50% av energitettheten (se f.eks. kapittel 32.4 i Y&F).

(2) Gitt en uendelig lang, rett leder som fører strømmen  $I_1$ . En kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant  $a$  plasseres med venstre sidekant i avstand  $c$  fra den rette lederen (se figur).

Sløyfa ligger i et plan gjennom den rette lederen og ligger så langt fra lederen ( $c \gg a$ ) slik at vi kan anta at magnetfeltet som  $I_1$  setter opp inni strømsløyfa er homogent og lik verdien i sentrum. Sløyfa roterer om en akse som går parallelt med  $I_1$  og gjennom midtpunktet av sløyfa, som vist i figuren. Rotasjonsfrekvensen er  $f$ .

Finn uttrykk for induisert elektromotorisk spenning i ledersløyfa. Sett inn tallsvar med oppgitte tallverdier:  $a = 0.100$  m,  $c = 1.00$  m,  $I_1 = 50$  A og  $f = 1.00$  kHz.



**Løsning:** Figuren viser ledersløyfa sett ovenfra.

Magnetfeltet er  $\vec{B} = B_\phi \hat{\phi}$  og normalen  $d\vec{A}$  til ledersløyfa danner under rotasjonen vinkel  $\theta = \omega t$  med  $\vec{B}$ .

Beste estimat for magnetfelt i sløyfa er

$$B_\phi(c + \frac{a}{2}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{c + \frac{a}{2}} = 9.52 \cdot 10^{-6} \text{ T.}$$

Indusert ems er gitt ved Faradays lov,  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ , der magnetisk fluks er gitt ved  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\phi(c + \frac{a}{2}) \cdot a^2 \cdot \cos\theta$ . Dette gir

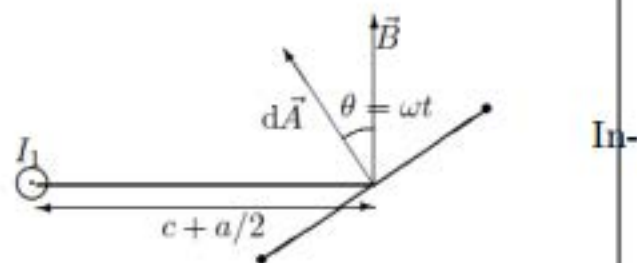
$$\mathcal{E} = -B_\phi(c + \frac{a}{2}) \cdot a^2 \cdot \frac{d(\cos\omega t)}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c + \frac{a}{2}} \cdot \omega \sin\omega t = \mathcal{E}_0 \sin\omega t,$$

der frekvensen er

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1} = 6.28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1},$$

og amplituden

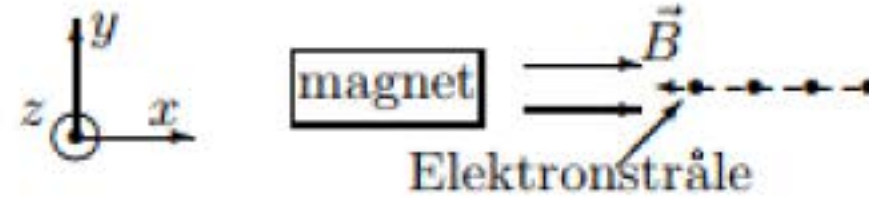
$$\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \frac{a^2}{c + \frac{a}{2}} \cdot \omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 50 \text{ A} \cdot \frac{(0.100 \text{ m})^2}{1.05 \text{ m}} \cdot 6.28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 0.60 \text{ mV.}$$





(3) En elektronstråle går i retning rett mot venstre, i negativ  $x$ -retning i figuren. Du ønsker å stoppe elektronstrålen ved å plassere en magnet med nordpolen rett mot strålen, slik at magnetisk felt  $B$  fra magneten peker rett til høyre ( $x$ -retning) mot elektronstrålen. Elektroner er negativt ladd. Vil du stoppe elektronstrålen?

- A. Nei, men den avbøyes i positiv  $y$ -retning.
- B. Nei, men den avbøyes i negativ  $y$ -retning.
- C. Ja, den vil gradvis miste fart og stoppe før magneten.
- D. Nei, den vil fortsette uhindret til den treffer magneten.
- E. Nei, men den vil miste fart.



Løsning: Med  $\vec{v}$  i  $-x$ -retning og  $\vec{B}$  i  $+x$ -retning er  $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$ . Elektronstrålen fortsetter rett på magneten.

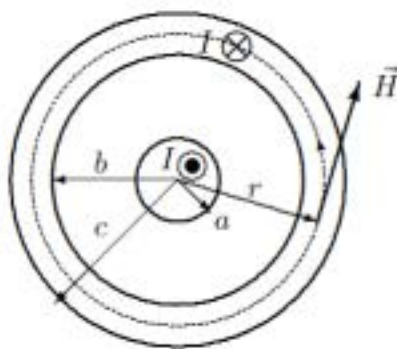
Alle ladde partikler som passerer gjennom et krysset elektrisk og magnetisk felt uten å bli avbøyd har samme

- A. masse
- B. fart
- C. bevegelsesmengde
- D. energi
- E. forhold mellom ladning og masse

Løsning: Med krysset elektrisk og magnetisk felt virker elektrisk og magnetisk kraft i motsatt retning. Når det akkurat ikke er avbøyning er Lorentzkrafta  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$ . Altså  $v = E/B$  gjelder for alle partikler, altså må de ha samme fart.

(4)

Løsning: Vi bruker Ampères lov for magnetfeltstyrken  $H$  med integrasjonsveg lik sirkel med radius  $r$  konsentrisk med kabelen (se stiplet sirkel på figuren).



Pga. symmetri vil  $H$  være asimutalt retta:  $\vec{H} = H \hat{\phi}$  og ha konstant verdi på integrasjonvegen. Retningen er gitt av høyrehåndsregelen. Ampères lov gir

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi r \stackrel{\text{(Amp)}}{=} I_{\text{encl}} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad (7)$$

der  $I_{\text{encl}}$  er strømmen i arealet innenfor integrasjonsvegen. Med jevnt fordelt strøm blir strømtettheten konstant innenfor hvert område og lik henholdsvis

$$J = \begin{cases} J_a = \frac{I}{\pi a^2} & r < a \\ 0 & r \in [a, b] \\ J_{bc} = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c. \end{cases} \quad (8)$$

For alle  $r$  er  $\vec{J} \parallel d\vec{A}$  og  $dA = 2\pi r dr$ , slik at strømmen  $I_{\text{encl}}$  i tverrsnitt mellom radius  $r_1$  og  $r_2$  blir

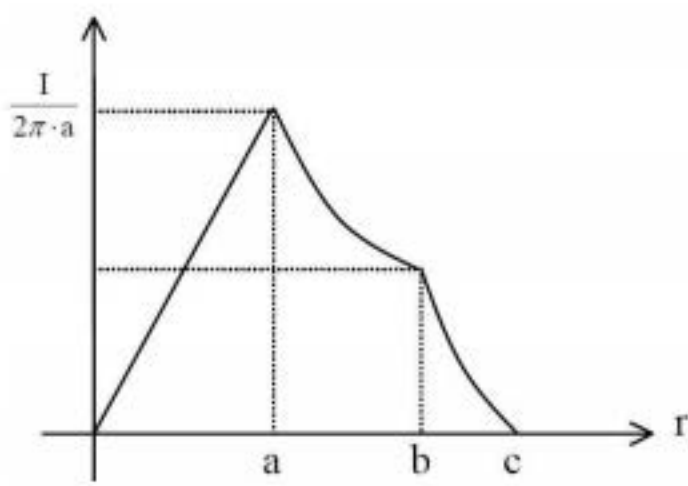
$$I_{\text{encl}} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r dr = J\pi r^2 \Big|_{r_1}^{r_2}. \quad (9)$$

Løsning av likning (??) for de ulike områdene på tilsvarende måte som i oppg. 8:

$$H \cdot 2\pi r = \begin{cases} J_a \pi(r^2 - 0^2) = I \cdot \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ I & r \in [a, b] \\ I + J_{bc} \pi(r^2 - b^2) = I - I \cdot \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2} & r < a \\ \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} & r \in [a, b] \\ \frac{I}{2\pi} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \frac{1}{r} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{cases}$$

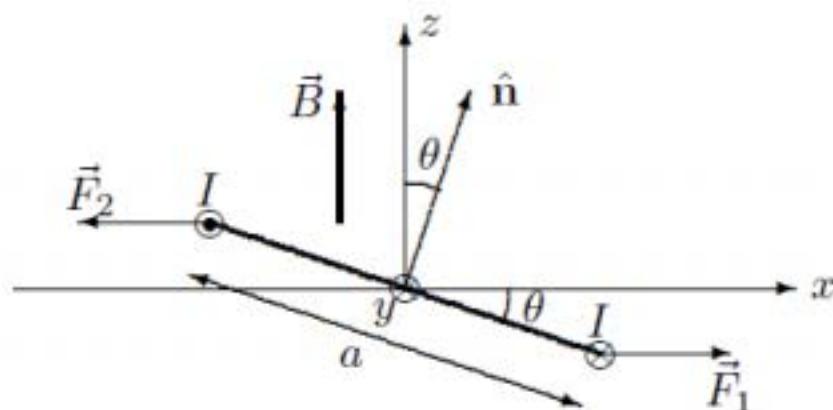
Skisse av  $H(r)$ :





(5)

**Løsning:** I figuren er kreftene på strømmene i  $+y$  og  $-y$ -retninger inntegnet som henholdsvis  $\vec{F}_1$  og  $\vec{F}_2$ . Disse bidrar til kraftmoment  $\vec{\tau}$  om  $y$ -aksen. Kraftene  $\vec{F}_3$  og  $\vec{F}_4$  på de to andre greiner (ikke inntegnet) er motsatt like store, virker i  $+y$ -retning og  $-y$ -retning og kan ikke rotere sløyfa (bidrar ikke til  $\vec{\tau}$ ).



Uttrykk for kreftene:

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = I(a\hat{j} \times B\hat{k}) = \underline{IaB\hat{i}},$$

$$\vec{F}_2 = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I(-a\hat{j} \times B\hat{k}) = \underline{-IaB\hat{i}}.$$

Den nærmeste greina i figuren med strøm ned mot høyre:

$$\vec{F}_3 = I\vec{\ell}_4 \times \vec{B} = IaB \sin(\pi/2 + \theta)(-\hat{j}) = \underline{-IaB \cos \theta \hat{j}}.$$

og for greina bakerst med strøm opp mot venstre:

$$\vec{F}_4 = I\vec{\ell}_3 \times \vec{B} = IaB \sin(\pi/2 - \theta)\hat{j} = \underline{IaB \cos \theta \hat{j}}.$$

Kreftene  $F_3$  og  $F_4$  nuller hverandre ut. Totalt kraftmoment om origo er da  $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ , hvor  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  er de tilhørende "armene". Da  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  og  $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ , er kraftmomentet lik fra begge kreftene. Med  $|r_1| = |r_2| = a/2$ ,  $|F_1| = IaB$  og vinkel  $\theta$  mellom  $\vec{r}_1$  og  $\vec{F}_1$  gir høyrehåndsregelen at totalt kraftmoment er lik

$$\vec{\tau} = 2 \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 2 \cdot a/2 \cdot IaB \cdot \sin \theta (-\hat{j}) = \underline{-Ia^2 B \sin \theta \hat{j}}.$$

**Løsning:** Potensiell energi  $dU \stackrel{\text{def}}{=} -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -\vec{\tau} \cdot d\theta \hat{j} = Ia^2 B \sin \theta d\theta$ . Obs fortegn: økende  $\theta$  gir økende pot. energi. Integrert:

$$U(\theta) - U(\pi/2) = \int_{\pi/2}^{\theta} dU = \int_{\pi/2}^{\theta} Ia^2 B \sin \theta d\theta = -Ia^2 B [\cos \theta]_{\pi/2}^{\theta} = \underline{-Ia^2 B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}.$$

Utledningene i denne oppgaven tilsvarende den presentert i forelesning og i kap. 27.7 i Young & Freedman.

(6)

**Løsning:** Til alle punktene trenger vi Kirchhoffs strømlov som gir  $I = I_R + I_C$ , dermed har vi bare to ukjente strømmer. Videre Kirchhoffs spenningslov, som f.eks. kan skrives  $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$ .

- (a) Umiddelbart etter bryteren er slått på har ikke kondensatoren rukket å få noen ladning:  $Q_C = 0$  og  $V_C = Q_C/C = 0$ . Hele spenningsfallet fra  $\mathcal{E}$  er altså over motstanden  $R_1$  med strøm  $I = \mathcal{E}/R_1$ . Hele denne strømmen går til kondensatoren fordi  $I_R = V_C/R = 0$ , altså  $I_C = I = \mathcal{E}/R_1$ . Svarene er altså:

$$\underline{Q_C = 0, \quad V_C = 0, \quad I_R = 0, \quad I = I_C = \mathcal{E}/R_1.}$$

- (b) Etter svært lang tid er kondensatoren fullt oppladd, og ingen strøm går til den,  $I_C = 0$ . Da er  $I = I_R$  og  $V_C = I_R R = IR$ . Da må fra Kirchhoff  $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$ :

$$\begin{aligned} I = I_R &= \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R}, \\ V_C = RI_R &= \mathcal{E} \frac{R}{R_1 + R}, \\ Q_C = V_C C &= \mathcal{E} \frac{RC}{R_1 + R}. \end{aligned}$$

- (c) Vi har to ukjente strømmer, og trenger to likninger. Den ene er Kirchhoffs spenningslov  $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$ , den andre er at  $V_C = V_R$  (eller egentlig Kirchhoffs spenningslov på masken med  $R$  og  $C$ ). Denne siste gir

$$\frac{Q_C}{C} = I_R R \Rightarrow I_R = \frac{Q_C}{RC}$$

Vi velger da  $I_C$  og  $Q_C$  som de to ukjente, men siden disse er knyttet sammen med  $I_C = dQ_C/dt$  har vi bare én ukjent,  $I_C$ . Vi søker derfor etter en likning for  $I_C$ , som vi får fra spenningsloven  $\mathcal{E} = R_1 I + V_C$ :

$$\mathcal{E} = R_1(I_R + I_C) + \frac{Q_C}{C} = R_1 \frac{Q_C}{RC} + R_1 I_C + \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_C}{C} \left( \frac{R_1}{R} + 1 \right) + R_1 I_C \quad (2)$$

Derivasjon av denne likningen gir følgende differensiallikning for  $I_C$ . (Vi kunne alternativt valgt  $Q_C$  som ukjent, dvs. en likning i  $Q_C$ . Se til slutt i denne oppgaven.)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ_C}{dt} \frac{1}{C} \left( \frac{R_1}{R} + 1 \right) + R_1 \frac{dI_C}{dt} \\ \frac{dI_C}{dt} &= -I_C \frac{1}{R_1 C} \left( \frac{R_1}{R} + 1 \right) \\ \frac{dI_C}{dt} &= -I_C \frac{1}{\tau}, \quad \text{der } \tau = \frac{R_1 RC}{R_1 + R}. \end{aligned}$$

Dette er en førsteordens diff.likning med løsning

$$I_C(t) = A e^{-t/\tau}$$

der vi fra startbetingelsen i a) har at  $A = I_C(0) = \mathcal{E}/R_1$ .

Resten av størrelsene blir:

$$Q_C(t) = \int_0^t I_C(t) dt = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \int_0^t e^{-t/\tau} dt = \frac{\mathcal{E}}{R_1} (-\tau) (e^{-t/\tau} - 1) = \mathcal{E} \frac{RC}{R_1 + R} (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$V_C(t) = \frac{Q_C}{C} = \mathcal{E} \frac{R}{R_1 + R} (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$I_R(t) = \frac{Q_C}{RC} = \mathcal{E} \frac{1}{R_1 + R} (1 - e^{-t/\tau}),$$

$$I(t) = I_C(t) + I_R(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} e^{-t/\tau} + \mathcal{E} \frac{1}{R_1 + R} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \frac{1}{R_1 + R} (R e^{-t/\tau} + R_1).$$

Vi kan konstantere at grenseverdiene for  $t = 0^+$  og  $t \rightarrow \infty$  i a) og b) stemmer ved innsetting i disse svarene.

Vi kan ALTERNATIVT velge å uttrykke likningen med  $Q_C$  som ukjent. Vi får fra likn. (2) (etter siste likhetstegn) med  $I_C = dQ_C/dt$ :

$$\mathcal{E} = \frac{Q_C}{RC} (R_1 + R) + R_1 \cdot \frac{dQ_C}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_C}{Q_C - \mathcal{E} \frac{RC}{R_1 + R}} = -dt \frac{R_1 + R}{R_1 RC} = -\frac{dt}{\tau}$$

osv. med løsning

$$\underline{Q_C(t) = \mathcal{E} \frac{RC}{R_1 + R} (1 - e^{-t/\tau}),}$$

og vi finner herfra

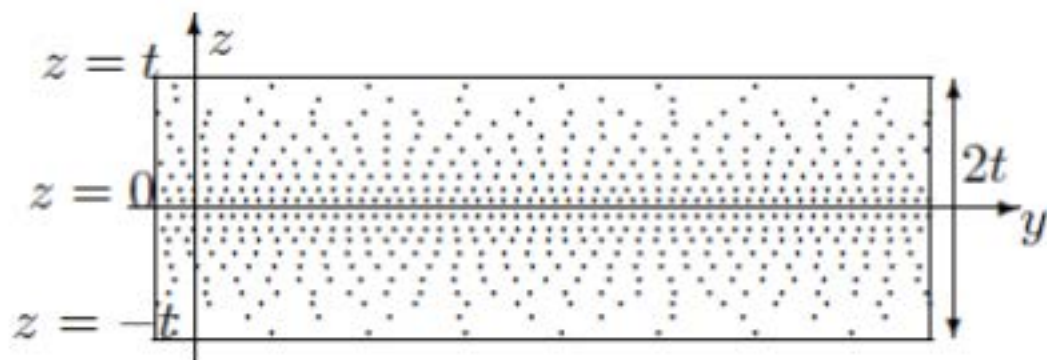
$$V(t) = \frac{Q_C(t)}{C} \quad \text{og} \quad I_C(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt}$$

med resultat som over.



(7)

Figuren under viser tverrsnitt av ei dielektrisk (elektrisk isolerende) plate med permittivitet  $\epsilon$ , total tykkelse  $2t$  i  $z$ -retningen og uendelig utstrekning i  $x$ - og  $y$ -retningene.



Plata har romladningstetthet gitt ved

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2t}\right),$$

der  $z$  er avstanden fra midtplanet i plata og  $\rho_0$  er en konstant. Ladningstettheten er visualisert med punktmarkeringer. Plata er omgitt av luft med permittivitet  $\epsilon_0$ .

- (a) Beregn den elektriske feltstyrken  $\vec{E}$  utenfor og inne i den dielektriske plata. Begrunn fremgangsmåten.

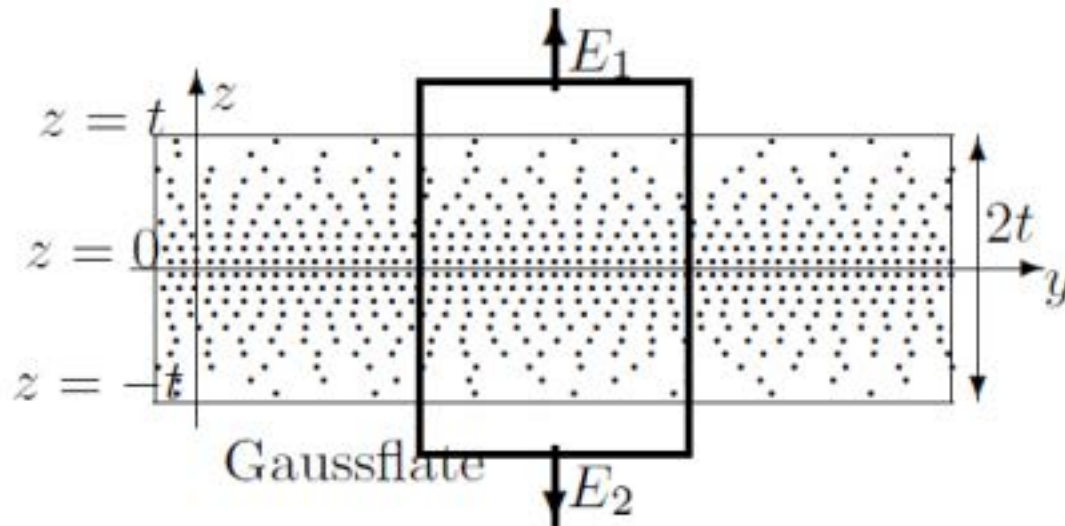
TIPS: Vær oppmerksom på forskjell i permittivitet inne i plata og utenfor. I Gauss' lov må permittiviteten for materialet på Gaussflata brukes.

**Løsning:** Retningen på det elektriske feltet er langs  $z$ -aksen på grunn av symmetrien i problemet, med  $\vec{E} = E \cdot \hat{\mathbf{k}}$  for  $z > 0$  og  $\vec{E} = E \cdot (-\hat{\mathbf{k}})$  for  $z < 0$  (illustrert ved  $E_1 = E_2 = E$  i figuren). Beregner først den elektriske feltstyrken  $\vec{E}$  utenfor plata,  $|z| > t$ : Bruker Gauss'

lov, med en lukket, sylindrisk Gaussflate plassert symmetrisk om  $z = 0$  og som strekker seg utenfor plata (vist på figuren):

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{encl}},$$

med  $\epsilon_0$  fordi en skal bruke den den permittivitet som ligger på Gaussflata.



Ingen bidrag for sideflatene der feltet er parallell med flatene, men kun bidrag til fluksintegralet fra de to endeflatene, som har areal  $A$ :

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2\epsilon_0 EA \quad (1)$$

Den valgte Gaussflata har ladning kun for  $|z| < t$ , integrerer for å finne totalladningen:

$$Q_{\text{encl}} = \int_{-t}^t \rho(z) A dz = A \rho_0 \int_{-t}^t \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) dz = A \rho_0 \frac{2t}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) \right]_{-t}^t = A \rho_0 \frac{4t}{\pi} \quad (2)$$

Fra kravet (1) = (2) får vi det elektriske feltet utenfor plata:

$$\underline{\vec{E} = \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{for } z > t, \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon_0} (-\hat{\mathbf{k}}) \quad \text{for } z < -t.} \quad (3)$$

Ved beregning av det elektriske feltet inne i plata,  $|z| < t$ , går vi fram på tilsvarende måte. Valg av Gaussflate blir som over, men den har høyde  $2z$  som slutter innenfor plata. Resulterende fluksintegral blir som ligning (1) fordi  $E$  er konstant for konstant  $z$ . Forskjellen ligger i ulik permittivitet og en annen verdi av ladningen innesluttet av den lukkede Gaussflata:

$$Q_{\text{encl}} = \int_{-z}^z \rho(z) A dz = A \rho_0 \frac{2t}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) \right]_{-z}^z = A \rho_0 \frac{4t}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right),$$

og feltet blir

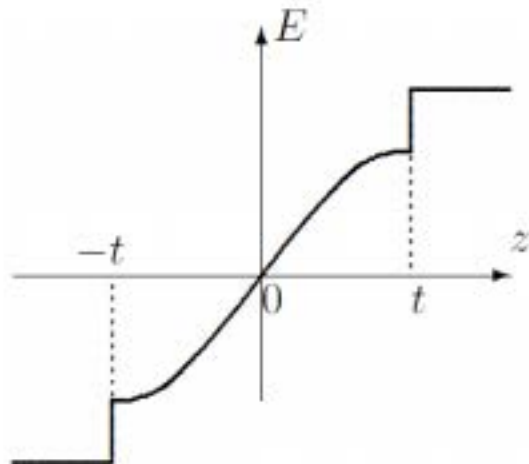
$$\underline{\vec{E} = \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) \hat{\mathbf{k}} \quad \text{for } |z| < t.} \quad (4)$$

Formelen tar vare på fortegnet slik at feltet går i  $\hat{\mathbf{k}}$ -retning for  $z > 0$  og i  $-\hat{\mathbf{k}}$ -retning for  $z < 0$ . For  $z = \pm t$  er uttrykket (4) likt uttrykkene (3), men ulik  $\epsilon$ .



(b) Lag ei skisse av  $|\vec{E}|$  som funksjon av  $z$ .

**Løsning:** Figuren under viser en skisse av det elektriske feltet. Diskontinuiteten til  $E$  ved  $|z| = t$  skyldes forskjell i permittivitet.



- (c) Beregn det elektriske potensialet  $V$  utenfor og inne i plata. Velg nullreferansen for det elektriske potensialet midt inne i plata ( $z = 0$ ).

**Løsning:** Med  $z = 0$  som referanse er det elektriske potensialet for  $0 < z < t$  gitt ved:

$$\begin{aligned} V(z) - V(z = 0) &= - \int_0^z E(z) dz = - \int_t^z \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) dz \\ &= \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon} \frac{2t}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) \right]_0^z = \frac{\rho_0 4t^2}{\pi^2 \epsilon} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{t}\right) - 1 \right] \quad (\text{for } |z| < t). \end{aligned} \quad (5)$$

$V(z)$  er symmetrisk om  $z = 0$ , og formelen gjelder også for negativ  $z$  så lenge  $|z| < t$ . Når  $V(z)$  skal beregnes for  $z > t$ , kan vi bruke første uttrykket i (3), og får følgende.

$$V(z) - V(z = t) = - \int_t^z E(z) dz = - \int_t^z \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon_0} dz = \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon_0} (t - z),$$

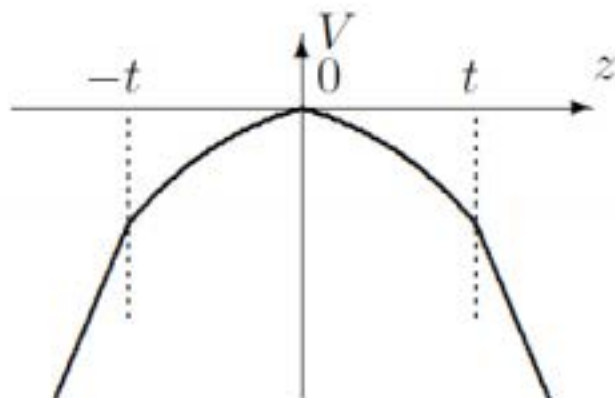
og fra (5) får vi  $V(z = t) = -\frac{\rho_0 4t^2}{\pi^2 \epsilon}$ , som gir

$$V(z) = \frac{\rho_0 2t}{\pi \epsilon_0} (t - z) - \frac{\rho_0 4t^2}{\pi^2 \epsilon} = \frac{\rho_0 4t^2}{\pi^2 \epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) - \frac{\rho_0 t}{\pi \epsilon_0} z \quad (\text{for } z > t),$$

eller lignende uttrykk. Siden  $V(z)$  er symmetrisk om  $z = 0$  blir uttrykket det samme for  $z < -t$ , men med  $z$  erstattet med  $|z|$ . Merk at  $V(z)$  er lineært for  $|z| > t$ , som det skal være da  $E$  er konstant.

- (d) Lag ei skisse av  $V(z)$  som funksjon av  $z$ .

**Løsning:** Figuren viser en skisse av det elektriske potensialet. Legg merke til at det er kontinuerlig, men den deriverte (som gir det elektriske feltet) ikke er kontinuerlig ved  $|z| = t$ .





(8)

(a) Finn uttrykk for det elektriske feltet  $\vec{E}(r)$  i alle deler av rommet.

**Løsning:** For å finne  $E$ -feltet deler vi rommet opp i tre områder: 1, 2 og 3 og bruker Gauss' lov i hver av dem.

$r < R$ : Innenfor det indre skallet er det ingen ladning, slik at  $\vec{E} = \vec{0}$ .

$R < r < \frac{3}{2}R$ : Gaussflate = kuleflate som omslutter indre skall. Ladningen innenfor Gauss-

flata blir  $Q_{\text{encl}} = q$  og Gauss' lov lyder

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

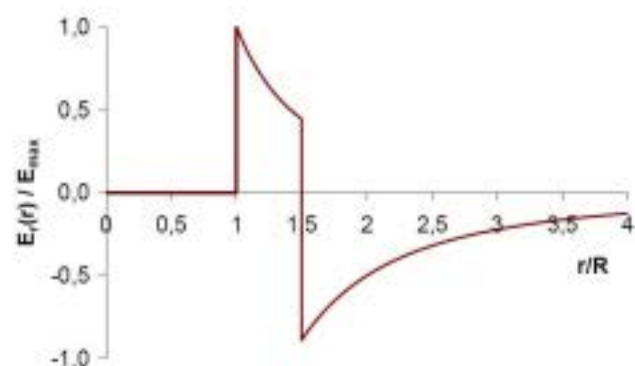
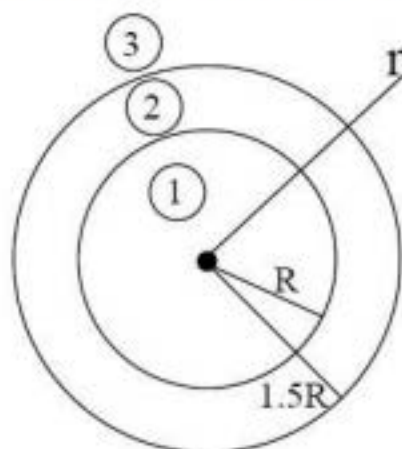
Pga. symmetri må  $\vec{E}$  være konstant og radiell over kuleflata:  $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ , slik at

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$\frac{3}{2}R < r$ : Gaussflate = kuleflate som omslutter ytre skall. Ladningen innenfor Gaussflata blir  $Q_{\text{encl}} = q - 3q = -2q$ .

$$E(r) = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Ei skisse av  $E(r)$  er vist under til høyre.



(b) Hva er potensialdifferansen mellom skallene?

**Løsning:** Vi kan finne potensialet på to måter, enten bruke  $E$ -felt fra oppgave a), eller bruke at potensialet fra et kuleskall er kjent ( $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ), og addere bidraget fra de to kuleskall. Vi presenterer her den første metoden:

$$\Delta V = V_{\frac{3}{2}R} - V_R = - \int_R^{\frac{3}{2}R} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_R^{\frac{3}{2}R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\frac{3}{2}R} - \frac{1}{R} \right] = - \frac{q}{12\pi\epsilon_0 R}.$$

(c) Hvordan vil ladningen fordele seg dersom de to skallene forbindes med en tynn ledende tråd?

**Løsning:** Når skallene blir forbundet, blir potensialforskjellen mellom dem null. Systemet kan betraktes som én leder, som ikke har noen ladning inni. All ladning går da til det ytterste skallet, som får ladning  $q - 3q = -2q$ .

(9)

**Løsning:** Punktladningene  $Q_1$  og  $Q_2$  flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene  $Q_1$  og  $Q_2$  i punktene A og B, hhv  $V_A$  og  $V_B$ , og deretter endringen i potensiell energi,  $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$ . Potensialet i avstand  $r$  fra en punktladning  $Q$  er

$$V(r) = k \frac{Q}{r} \quad \left( k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

dvs. Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er  $r_{1A} = r_{2B} = 0.600$  m (fra  $Q_1$  til A og fra  $Q_2$  til B) og  $r_{1B} = r_{2A} = \sqrt{0.600^2 + 0.800^2}$  m = 1.000 m (fra  $Q_1$  til B og fra  $Q_2$  til A). Dermed:

$$V_A = k \frac{Q_1}{r_{1A}} + k \frac{Q_2}{r_{2A}} \quad \text{og} \quad V_B = k \frac{Q_1}{r_{1B}} + k \frac{Q_2}{r_{2B}}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = kQ_1 \left( \frac{1}{r_{1B}} - \frac{1}{r_{1A}} \right) + kQ_2 \left( \frac{1}{r_{2B}} - \frac{1}{r_{2A}} \right)$$

Her er

$$Q_1 = 120 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad Q_2 = -90 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$\left( \frac{1}{r_{2B}} - \frac{1}{r_{2A}} \right) = 0.6667 \text{ m}^{-1} \quad \text{og} \quad \left( \frac{1}{r_{1B}} - \frac{1}{r_{1A}} \right) = -0.6667 \text{ m}^{-1},$$

som gir

$$\Delta V = -8.99 \cdot 10^9 \text{ Vm/C} \cdot (90 + 120) \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 0.6667 \text{ m}^{-1} = -1259 \text{ V}$$

og endelig

$$\underline{\Delta U = -e \cdot \Delta V = 1.26 \text{ keV.}}$$