

Norwegian University of Science and Technology
Department of Physics

Contact: Jacob Linder
Phone: 951 73 515

Suggested solution for 2020 Exam in Electricity and Magnetism

NOTE: The solutions below are meant as guidelines for how the problems may be solved and do not necessarily contain all the detailed steps of the calculations.

1: All ladning fordeles ut til det ytre av ledersystemet, som altså er på utsida av metallskallet. Metallkula får null ladning.

2: Et statisk elektrisk felt i et tidsuavhengig system må tilfredsstille $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Kun $\mathbf{E} = E_0 \left(\frac{x}{a} \hat{x} - \frac{z}{a} \hat{z} \right)$ tilfredsstiller det.

3: Retningen på magnetfeltet rundt den vertikale lederen er asimutalt i et horisontalt plan. Krafta på den horisontale lederen er null i det nærmeste punktet, og for alle andre punkter vil krafta på to punkter like langt fra dette midtpunktet kansellere med like stor komponent i hver retning (det vil derimot være et netto dreiemoment på lederen). Total kraft er null.

4: Netto magnetisk fluks gjennom en lukket overflate er alltid lik null.

5: Gauss lov gir at $E(r) = \lambda/2\pi r\epsilon_0 = 2\lambda/rv$.

6: Graf 3. Utenfor sylinder avtar B -feltet som $1/r$, innenfor sylinder øker B lineært med r . Dette kan beregnes fra Amperes lov (som gjort i forelesning).

7: $E_d < E_0, V_d < V_0$. Da spenningsforsyning er kopla fra er ladningen Q konstant. Kapasitansen øker slik at spenning $V = Q/C$ og $E = V/d$ avtar.

8: Alternativ 3. $E = dV/dr$ gir at 3 er riktig. Det er fritt valgt referansepunkt for V , men ikke for E , slik at E ikke kan være null når V øker.

9: Løsningen blir som vist nedenfor med erstatningene $R \rightarrow 3R, \rho_0 \rightarrow m$:

Total charge given by

$$Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (1)$$

Plug in $\rho(r)$ and obtain

$$Q = 4\pi \rho_0 R^3 / 12. \quad (2)$$

To obtain the electric field, we use Gauss' law. For radii larger than R , the field is the same as that of a point-particle with charge Q . For radii smaller than R , only part of the charge density is contained in the surface we integrate over. For $r < R$, we obtain

$$E \times 4\pi r^2 = Q_{\text{encl}} / \epsilon_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 (1 - r'/R) dr'. \quad (3)$$

Performing the integral, one ends up with

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(4 - \frac{3r}{R}\right) \quad (4)$$

for $r < R$.

10: Effektiv kapasitans blir

$$C_{\text{eff}} = [2/C_2 + 1/C_1]^{-1}. \quad (5)$$

I seriekobling gjelder $Q = C_{\text{eff}}V$. Siden total energi lagret er $U = \frac{1}{2}QV$ for seriekoblingen, får vi

$$U = \frac{1}{2}V^2[2/C_2 + 1/C_1]^{-1}. \quad (6)$$

11: Vi må ha $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ for ethvert magnetfelt, derfor er generell løsning $g(y) = c_1$.

12: Som vist i forelesningsnotatene til kap 32, er midlere verdi til størrelsen til Poynting-vektoren til en sinusoidal EM bølge lik intensiteten til bølgen. Siden $W = \text{kg m}^2/\text{s}^3$, får vi at midlere verdi er $130 \text{ kg}/\text{s}^3$.

13: I diamagnetiske og paramagnetiske materialer eksisterer ingen netto magnetisering uten et eksternt felt. I ferromagneter eksisterer en magnetisering, men netto magnetisering kan være undertrykket på eksistensen av magnetiske domener. Når et felt påtrykkes, vil diamagneter skape et felt i motsatt retning mens paramagneter skaper et felt i samme retning. Ferromagneter responderer ved å la domenene sine peke i samme retning som det ytre feltet. I tilfelle 2 og 3 er det koblingen mellom de magnetiske momentene til elektronspinnene og det ytre feltet i form av en energi $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ som gjør at spinnene retter seg inn langs det ytre feltet.

14: Dette er en RLC krets hvor elementene er koblet i parallell. En grundig utledning av impedansen vises i seksjon 12.6 her: <http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/notes/modules/guide12.pdf> for en behandling. Sluttsultatet er

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1/R)^2 + (1/X_L - 1/X_C)^2}}. \quad (7)$$

15: Etter lang tid er $\dot{I} = 0$ og derfor null spenningsfall over spolen. Den parallelle 60Ω motstanden har derfor null spenningsfall (og null strøm).

16: Oppgaven kan løses som vist nedenfor, men ved å bruke annerledes tallverdier (de som er oppgitt i eksamensoppgaven). Det gir en tidskonstant $\tau \simeq 2.22 \text{ s}$ og dermed $|I_d(t = 100 \text{ s})| \simeq 4.5 \times 10^{-26} \text{ A}$.

Utladningen er som en RC -krets som har tidskonstant $\tau = RC$. Uttrykk for C oppgitt (eller formelark) og uttrykk for R fra formelark gir

$$\tau = RC = \rho \frac{d}{A} \cdot \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \rho \cdot \epsilon_r \epsilon_0 = 2,0 \cdot 10^{12} \Omega \text{ m} \cdot 8,00 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 141,6 \text{ s} = \underline{142 \text{ s}}.$$

Enhetskontroll: $\Omega \cdot \text{F} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{C}}{\text{A}} = \text{s}$.

De fleste vil nok ha behov for å beregne $\tau = RC$. Denne bestemmes ved å løse differensiallikningen for ladningen $Q(t)$. Nå er $Q = CV = CRI$ (definisjonen av kapasitans og Ohms lov). Strømmen er $I = -dQ/dt$ med positiv strøm mot høyre (Q avtar). Dermed

$$Q = -CRdQ/dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{CR}dt$$

som integrert fra $Q(0) = Q_0$ til $Q(t)$ gir

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{1}{CR}t \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 \exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\} = Q_0 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}.$$

Forskyvningsstrømmen er $I_d = d\Phi/dt$ der Φ er elektrisk fluks mellom kondensatorplatene. Fra Gauss lov (eller velkjent fra før) får vi $\Phi = DA = Q =$ ladning på kondensatoren og dermed

$$I_d(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{\tau} \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}.$$

Ladningen $Q(t)$ avtar slik at I_d er negativ, dvs. retning mot venstre. Ved $t = 120$ s er

$$I_d(120 \text{ s}) = -\frac{10 \mu\text{C}}{141,6 \text{ s}} \exp\left\{-\frac{120}{141,6}\right\} = -30,26 \text{ nA} = \underline{-30 \text{ nA}}.$$

17: Se neste side for utledning ved å først etablere at \mathbf{B} må peke langs senteraksen bruke en Ampersk løkke.