NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Onsdag 15. desember 2004 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Eksamen bestod av 4 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen.

Sensuren kan ventes ca 12. januar.

OPPGAVE 1 (Teller 15%)

1: A. 2: B. 3: D. 4: A. 5: C. 6: A.

OPPGAVE 2 (Teller 25%)

Fra hysteresekurven har vi at $B(H=0) = \pm 1.0$ T og $H(B=0) = \mp 3.4$ A/mm $= \mp 3400$ A/m. Videre ser vi at $B(H \to \pm\infty) = \pm 1.5$ T. Her gjelder øvre fortegn for den øverste kurven (dvs minkende H).

Starter med å bestemme H_0:

$$B(3.4) = 0 = B_0 \arctan 0$$
$$\Rightarrow H_0 = 3.4 \text{ A/mm}$$

Deretter B_0:

$$B(\infty) = 1.5 \text{ T} = B_0 \arctan(\infty) = B_0 \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow B_0 = \frac{3.0}{\pi} \text{ T} \simeq 0.95 \text{ T}$$

Til slutt α:

$$B(0) = 1.0 \text{ T} = B_0 \arctan(\alpha)$$
$$\Rightarrow \arctan(\alpha) = \frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \alpha = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \simeq 1.73$$

For å bestemme w finner vi først $H(B)$:

$$\begin{aligned}
B(H) &= B_0 \arctan\left(\alpha \frac{H \mp H_0}{H_0}\right) \\
\Rightarrow \alpha \frac{H \mp H_0}{H_0} &= \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\
\Rightarrow H \mp H_0 &= \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\
\Rightarrow H_\pm(B) &= \pm H_0 + \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right)
\end{aligned}$$

Her gjelder øvre fortegn kurven som tilsvarer økende verdi av H. Energien w som tapes i jernsylinderen pr volumenhet er gitt ved integralet av $H(B)$ en runde rundt hysteresekurven. Integrasjonsgrensene er ± 1.5 T, dvs $\pm B_0\pi/2$.

$$\begin{aligned}
w &= \oint H(B)\, dB \\
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+\, dB + \int_{B_0\pi/2}^{-B_0\pi/2} H_-\, dB \\
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+\, dB - \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_-\, dB
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} (H_+ - H_-) dB \\
&= 2H_0 \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} dB \\
&= 2H_0 B_0 \pi
\end{aligned}
$$

Innsetting av tallverdier gir

$$w = 2 \cdot 3400 \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \pi = 20400$$

dvs i enheten J/m^3.

OPPGAVE 3 (Teller 30%)

$$
\begin{aligned}
\langle P_R \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_R(t) I_R(t)\ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T R I_R(t) \cdot I_R(t)\ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T R |I_{R0}|^2 \cos^2 \omega t\ dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi} R |I_{R0}|^2 \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 x\ dx
\end{aligned}
$$

hvor vi har substituert $x = \omega t$, og dermed $dt = dx/\omega$. Bruker oppgitt sammenheng og finner

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2 x\ dx &= |_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

som gir

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} R |I_{R0}|^2$$

Kretsens totale impedans er

$$Z = R_0 + \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C \right)^{-1} = R_0 + \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C}$$

Spenningsfallet over parallellkoblingen av R_1 og C er

$$\tilde{V} = V - R_0 I = ZI - R_0 I = (Z - R_0) I = \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C}\ I$$

Dermed er strømmen gjennom R_1 lik

$$I_1 = \frac{\tilde{V}}{R_1} = \frac{1}{1 + i\omega R_1 C}\ I$$

med amplitude

$$|I_{10}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}}\ |I_0|$$

slik at

$$\frac{|I_0|^2}{|I_{10}|^2} = 1 + (\omega R_1 C)^2$$

som vi vil trenge straks...
Utnyttelsesgraden blir

$$\begin{aligned}
\frac{\langle P_1\rangle}{\langle P_0\rangle + \langle P_1\rangle} &= \frac{R_1|I_{10}|^2/2}{R_0|I_0|^2/2 + R_1|I_{10}|^2/2} \\
&= \frac{1}{1 + R_0|I_0|^2/R_1|I_{10}|^2} \\
&= \frac{1}{1 + R_0[1 + (\omega R_1 C)^2]/R_1}
\end{aligned}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir en utnyttelsesgrad på

$$\left(1 + \frac{5}{25}[1 + (314 \cdot 25 \cdot 0.0002)^2]\right)^{-1} \simeq 0.59$$

dvs 59 %.

En alternativ framgangsmåte er som følger:
Vi skal bestemme forholdet

$$\frac{\langle P_1\rangle}{\langle P_0\rangle + \langle P_1\rangle} = \frac{\langle P_1\rangle}{\langle P_{\rm tot}\rangle} = \frac{\langle P_{\rm tot}\rangle - \langle P_0\rangle}{\langle P_{\rm tot}\rangle} = 1 - \frac{\langle P_0\rangle}{\langle P_{\rm tot}\rangle}$$

Her har vi $\langle P_0\rangle$ fra før, mens

$$\langle P_{\rm tot}\rangle = \frac{1}{2}V_0|I_0|\cos\alpha = \frac{1}{2}|Z||I_0|^2\cos\alpha$$

Da må vi regne ut $|Z|$ og fasevinkelen α:

$$\begin{aligned}
|Z| &= \left|R_0 + \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C}\right| \\
&= \left|\frac{R_0 + R_1 + i\omega R_0 R_1 C}{1 + i\omega R_1 C}\right| \\
&= \sqrt{\frac{(R_0 + R_1)^2 + (\omega R_0 R_1 C)^2}{1 + (\omega R_1 C)^2}} \\
&= 16.6593\,\Omega
\end{aligned}$$

Telleren i Z er

$$T_Z = R_0 + R_1 + i\omega R_0 R_1 C = |T_Z|\exp\left(i\arctan\frac{\omega R_0 R_1 C}{R_0 + R_1}\right)$$

og nevneren i Z er

$$N_Z = 1 + i\omega R_1 C = |N_Z|\exp\left(i\arctan\omega R_1 C\right)$$

slik at total fasevinkel for Z blir

$$\alpha = \arctan\frac{\omega R_0 R_1 C}{R_0 + R_1} - \arctan\omega R_1 C \simeq -0.7477$$

Altså er $\cos\alpha \simeq 0.7333$, og vi har for utnyttelsesgraden:

$$1 - \frac{R_0}{|Z|\cos\alpha} = 1 - \frac{5}{16.6593 \cdot 0.7333} \simeq 0.59$$

OPPGAVE 4 (Teller 30%)

Kretsens impedans er

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

slik at strømamplituden blir

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

Vi ser at nevneren antar sin minimale verdi R når $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Dette gir maksimal verdi for $|I_0|$. Følgelig er kretsens resonansfrekvens

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Høyeste ønskede resonansfrekvens, $f_{0,\text{max}} = 100$ MHz, krever kapasitans

$$C_{\text{min}} = \frac{1}{4\pi^2 L f_{0,\text{max}}^2} = 1.206 \text{ pF}$$

Laveste ønskede resonansfrekvens, $f_{0,\text{min}} = 90$ MHz, krever kapasitans

$$C_{\text{max}} = \frac{1}{4\pi^2 L f_{0,\text{min}}^2} = 1.489 \text{ pF}$$

Kapasitansen må derfor kunne varieres mellom 1.2 og 1.5 pF.

Hvis vi kaller strømamplituden ved $f_0 \pm 0.2$MHz for $I_0^{\pm}$ og tilhørende impedans (i absoluttverdi) for $Z_{\pm}$, krever oppgaven at

$$\frac{I_0^{\pm}}{I_0} \leq 0.2$$

dvs

$$\frac{Z_0}{Z_{\pm}} \leq 0.2$$

eventuelt

$$25 Z_0^2 \leq Z_{\pm}^2$$

Her er $Z_0 = R$ impedansen ved resonans mens

$$Z_{\pm}^2 = R^2 + \left(\omega_{\pm} L - \frac{1}{\omega_{\pm} C}\right)^2$$

er impedansen ved "grensefrekvensene"

$$\omega_\pm = \omega_0 \pm \Delta\omega = 2\pi(f_0 \pm 0.2\ \mathrm{MHz})$$

Kravet til motstanden blir

$$R \leq \frac{1}{\sqrt{24}} \left| \omega_\pm L - \frac{1}{\omega_\pm C} \right|$$

Her er det bare å sette inn tallverdier og bestemme største tillatte verdi av R. Strengt tatt burde vi sjekke både øvre og nedre grense av f_0, og dessuten både pluss og minus Δf. Her vil disse fire "variantene" gi enten 1.0 eller 1.1 Ω, så vi konkluderer med at

$$R \leq 1.0\ \Omega$$