Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For store avstander z vil ladningen på skiven bli som en punktladning med tilhørende potensial. Med areal

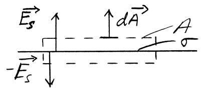
$$A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

blir ladningen på skiven

$$Q = A\sigma = \underline{\underline{\pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma}}$$

slik at for store z $(\to\infty)$ blir potensialet

$$\underline{\underline{V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z}}}$$

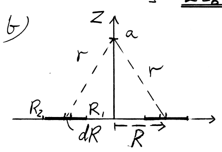


Det elektriske feltet vil være symmetrisk om skiven og dermed like sterkt men motsatt rettet på de 2 sidene. Ved å benytte Gauss lov finner en da

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\,d\vec{A} = 2\varepsilon_0 E_s A = q_{in} = \sigma A$$

$$\underline{\underline{E_s = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma}}$$

b)



En ring med bredde dR har areal $2\pi R\,dR$ og ladning $dq = \sigma \cdot 2\pi R\,dR$. Alle punktene på denne ringen ligger i samme avstand fra z-aksen, $r = \sqrt{R^2+z^2}$. Bidraget til potensialet fra ladningen dq blir derfor

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Det resulterende potensialet blir

$$V = V(z) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big|_{R_1}^{R_2}\sqrt{R^2+z^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right)}}$$

c) Ringens omkrets (lengde): $L = 2\pi R_0$.

Motstanden i ringen er $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}$

slik strømstyrken blir

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{6.0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}\cdot 5{,}81\cdot 10^{7}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{2\cdot\pi\cdot 5{,}0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{1{,}66\,\mathrm{A}}}$$

$(\approx 1{,}7\,\mathrm{A})$

Oppgave 2.

a) Indusert elektromotorisk kraft (spenning):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Magnetisk fluks innenfor strømsløyfen er så

$$\phi_m = \int \vec{B}\,d\vec{A} = BA = xLB$$

slik at $|\mathcal{E}| = |-\dot{x}LB| = vLB$

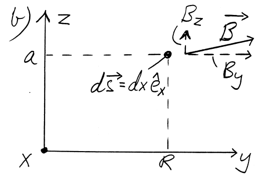
Med $|\mathcal{E}| = RI$ blir følgelig indusert strøm

$$\underline{\underline{I = \frac{vLB}{R}}}$$

Kraften som virker på ledningen blir da

$$F = |I(\vec{L}\times\vec{B})| = ILB = \underline{\underline{\frac{v}{R}(LB)^2}}$$

b)



Ved å legge linjeelementet $d\vec{s}$ der ringen krysser yz-planet vil bare y-komponenten B_y bidra til kraften langs z-aksen.

Denne er

$$B_y = 3\frac{m}{r^5}zy = 3\frac{m}{r^5}aR \quad (r^2 = R^2+a^2)$$

Kraften fra et ledningsstykke $d\vec{s} = \hat{e}_x\,dx$ blir nå $(dx \to ds_x = ds)$

$$d\vec{F} = I(d\vec{s}\times\vec{B})$$

$$dF_z = I(ds_x B_y - ds_y B_x) = IB_y\,ds = 3\frac{mI}{r^5}aR\,ds$$

Med samme bidrag rundt hele ringen (med gitt $ds = |d\vec{s}|$) finner en den resulterende kraften

$$F_z = \int dF_z = 3\frac{m}{r^5}aR\oint ds = \underline{\underline{\frac{6\pi R^2 amI}{(R^2+a^2)^{5/2}}}}$$

c) Magnetisk fluks gjennom ringen

$$\phi_m = \int\vec{B}\,d\vec{A} = \int_0^R B_z\cdot 2\pi\rho\,d\rho = 2\pi m\int_0^R\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\rho\,d\rho$$

der $r = (a^2+\rho^2)^{1/2}$. Med de oppgitte integralene finnes så

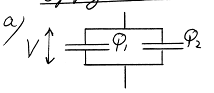
$$\phi_m = -2\pi m\Big|_0^R\left(\frac{3a^2}{3r^3} - \frac{1}{r}\right) = -2\pi m\left(\frac{a^2}{(R^2+a^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{a^3} - \frac{1}{(R^2+a^2)^{1/2}} + \frac{1}{a}\right) = \underline{2\pi m\frac{R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}}$$

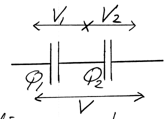
Med $\dot{m} = -m_0\,\omega\sin\omega t$ blir indusert elektromotorisk kraft:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \underline{\underline{2\pi m_0\frac{R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}\,\omega\sin\omega t}}$$

Oppgave 3.

a)





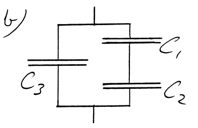
Ved parallellkopling må en ha resulterende ladning $Q = Q_1 + Q_2$ og spenning $V = V_1 + V_2$. Dette medfører $CV = C_1V_1 + C_2V_2 = (C_1 + C_2)V$ eller

$$\underline{\underline{C = C_1 + C_2}}$$

Ved seriekopling har en tilsvarende $V = V_1 + V_2$ og $Q = Q_1 = Q_2$ slik at $Q/C = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$ eller

$$\underline{\underline{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}}$$

b)



Kapasitansen kan deles opp i 3 kapasitanser som angitt. Med

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

har en så

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A_\varepsilon}{\frac{1}{3}d} = 3\eta C_0; \quad C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_\varepsilon}{\frac{2}{3}d} = \frac{3}{2}\varepsilon_r \eta C_0 = \underline{\frac{15}{2}\eta C_0}$$

$$C_3 = \varepsilon_0 \frac{A - A_\varepsilon}{d} = \underline{(1-\eta)C_0}$$

Seriekopling gir først

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \left(\frac{1}{3\eta} + \frac{2}{3\varepsilon_r\eta}\right)\frac{1}{C_0} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3\varepsilon_r\eta}\frac{1}{C_0}$$

eller $$C_4 = \frac{3\varepsilon_r\eta}{\varepsilon_r + 2}C_0 = \frac{15}{7}\eta C_0$$

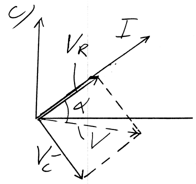
Parallellkoplinger gir dermed:

$$C = C_3 + C_4 = \left(1 - \eta + \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 2}\eta\right)C_0 = \left(1 + \frac{8}{7}\eta\right)C_0 = 2C_0$$

Løst m.h.p. η gir dette ved dobling av kapasitansen

$$\eta = \underline{\underline{\frac{7}{8}}} \quad \left(= \frac{\varepsilon_r + 2}{2(\varepsilon_r - 1)}\right)$$

c)



Kapasitansen har reaktansen $X_c = \frac{1}{\omega C}$. En har så $V_R = RI$ og $V_C = X_c I$ (seriekopling, dvs. samme I). Med $V = ZI$ blir impedansen

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\sqrt{V_R^2 + V_C^2}}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} =$$

$$\left(250^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}}\right)^2\right)^{1/2}\Omega = \underline{\underline{405\ \Omega}}$$

Fasevinkelen er bestemt av (se figur)

$$\cos\alpha = \frac{V_R}{V} = \frac{250}{405} = 0{,}617 \text{ eller } \alpha = \underline{\underline{-52^\circ}}$$

[Med komplekse tall: $Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i\frac{1}{\omega C} = |Z|e^{i\alpha}$ som betyr $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$ og $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega CR}$ (evt. $\cos\alpha = \frac{R}{|Z|}$).]