Eksamen i fag SIF4012
Fysikk 31/5-01

Forslag til løsning

Oppgave 1

a) Sammenhengen mellom overflateladning σ og elektrisk felt $\vec{E}$ blir som i oppgave 1, slik at

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

Nå er videre $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der V er spenningen mellom platene slik at en finner

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

og kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Med konstant relativ permittivitet ε_r blir kapasitansen

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Numerisk

$$C = 5.6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}\,\frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}\,m^2}{3 \cdot 10^{-3}\,m} = 1{,}78 \cdot 10^{-12}\,As/V \approx 2{,}0\,nF$$

b) Med dielektrisk medium vil overflateladning $\sigma = \varepsilon_0 E$ erstattes med

$$D = \sigma = Q/A$$

Dette er også verdien til D mellom platene, dvs

$$D_z = D = D(z) = Q/A \quad \text{(konst)}$$

da det ikke finnes fri romladning mellom platene. Det elektriske feltet følger nå fra $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$

$$E_z = E = E(z) = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} D = \frac{1}{a+bz}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \left(\sigma = \frac{Q}{A}\right)$$

Polarisasjonen blir følgelig

$$P_z = P = P(z) = D - \varepsilon_0 E = \sigma\left(1 - \frac{1}{a+bz}\right)$$

Potensialforskjellen (spenningen) mellom platene finnes nå ved å integrere det elektriske feltet

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_d^0 E_z\,dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d \frac{dz}{a+bz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{b}\ln(a+bz)\Big|_0^d$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{b}\left(\ln(a+bd) - \ln a\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 b}\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)$$

Kapasitansen blir

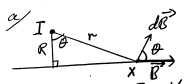
$$C_V = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 b}\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)} = \varepsilon_0 \frac{bA}{\ln\left(1+\frac{b}{a}d\right)}$$

Fri romladningstetthet er gitt ved $\rho = \nabla\cdot\vec{D}$ og samlet (netto) er gitt ved $\rho_n = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}$. Følgelig er bunden romladningstetthet gitt ved

$$\rho_b = \rho_b(z) = \rho_n - \rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E} - \nabla\cdot\vec{D} = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = -\sigma\frac{b}{(a+bz)^2}$$

Oppgave 2

a)



Bidraget til magnetfeltet fra strømelement $d\vec{l}$ er gitt ved

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2} \qquad \text{der } r^2 = R^2 + x^2$$

Siden $d\vec{l} \perp \hat{r}$ og følgelig $|d\vec{l}\times\hat{r}| = dl$. Resulterende magnetfelt vil peke langs x-aksen p.g.a. symmetrien. Dekomposisjon langs x-aksen gir så

$$dB_x = \cos\theta\, dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}dl$$

da $\cos\theta = \frac{R}{r}$. Ved integrering rundt sirkelen er r konstant. Resulterende magnetfelt for en vinding blir følgelig

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}2\pi R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3}$$

Med N vindinger får en derved

$$B = NB_x = \frac{KI}{r^3} \qquad \text{der } K = \frac{1}{2}N\mu_0 R^2$$

$$(\sigma = I,\ r^2 = R^2 + x^2)$$

b) Gjensidig induksjon er bestemt av

$$\Phi_2 = MI_1$$

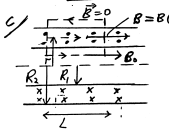
der I_1 kan være strømmen i den store spolen mens Φ_2 er den magnetiske fluksen gjennom den andre spolen fra den første. Med areal $A = \pi R_2^2$, N_2 vindinger og magnetfelt som antas konstant over den lille spolen ($R_2 \ll R$) blir denne

$$\Phi_2 = N_2 A B = N_2 A \frac{K}{r^3} I = MI_1$$

Med $I = I_1$ finner en følgelig

$$M = N_2 A \frac{K}{r^3} \qquad \text{der } A = \pi R_2^2 \text{ og } K = \frac{1}{2}N\mu_0 R^2$$

c)



Med integrasjonskurve som på figuren finner en

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = HL$$

For $r < R_1$ er strømmen innenfor integrasjonskurven

$$I_{in} = nLI$$

For stigningsforhold blir Ampères lov $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$ og vi finner

$$HL = I_{in} = nLI \text{ eller } H = nI$$

og følgelig med $\mu_r = 1$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 nI$$

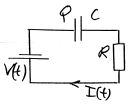
Med $R_1 < r < R_2$ blir det færre viklinger innenfor integrasjonsveien. Mellom radiene R_1 og R_2 er det $N = nL$ viklinger på lengde L slik at mellom radien r og R_2 blir antall viklinger

$$N_r = N\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} = nL\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}$$

Tettheten av viklinger blir $n_r = N_r/L$. I samsvar med beregningen for $r < R_1$ blir dermed magnetfeltet i

$$B = B(r) = \mu_0 n_r I = \mu_0 n \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} I$$

Oppgave 3



Spenning over kapasitansen: $V_c = \frac{1}{C}Q$

Spenning over motstanden: $V_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$

Differensiallikningen for Q blir

$$V_R + V_c = V(t)$$

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 e^{-\sigma t}$$

Med $Q = Ke^{-\alpha t} + Ae^{-\sigma t}$ finner en

$$\dot{Q} = -\alpha K e^{-\alpha t} - \sigma A e^{-\sigma t}$$

som ved innsetting gir

$$\left(-R\alpha K + \frac{1}{C}K\right)e^{-\alpha t} + \left(-R\sigma A + \frac{1}{C}A\right)e^{-\sigma t} = V_0 e^{-\sigma t}$$

Da likningen gjelder for vilkårlig tid t må en ha

$$-R\alpha K + \frac{1}{C}K = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\left(-R\sigma + \frac{1}{C}\right)A = V_0$$

$$A = \frac{V_0 C}{1 - RC\sigma} = \frac{VC}{1 - \sigma/\alpha}$$

Størrelsen K bestemmes av begynnelsesverdien

$$0 = Q(0) = K + A$$

$$K = -A = \frac{VC}{1 - RC\sigma}$$