Kontinuasjonseksamen i emne SIF4012 Fysikk 2, 17/8 – 01.

Forslag til løsning.

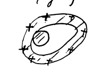
Oppgave 1

a)

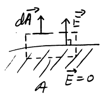
I likevekt kan det ikke være noe elektrisk felt i ledere, dvs. $\vec{E} = 0$ (ellers vil det gå strøm). Danner så et lukket volum inne i lederen og benytter Gauss lov ved å integrere over overflaten til dette volumet. Med $\vec{E}=0$ gir dette

$$\varphi = \varepsilon_0 \int \vec{E}\, d\vec{A} = 0$$

Dvs. nettoladningen $\underline{\varphi = 0}$ innenfor et slikt volum. Følgelig må all nettoladning være plassert på overflaten.



Når en ladet metallkule berører innsiden av et lukket metallkulrom vil hele ladningen overføres til ytterflaten av systemet da det ikke kan være nettoladning på innerflaten i likevekt (da $\vec{E}=0$ også i hulrommet).



For å finne sammenhengen mellom $\vec{E}$ og σ langs en metalloverflate kan en benytte Gauss lov. Ved å integrere over overflaten til det skisserte volumet finner en

$$\varepsilon_0 \int \vec{E}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 E A = \varphi = \sigma A$$

$$\underline{\underline{\sigma = \varepsilon_0 E}}$$

b) For store avstander fra kula blir potensialet $V(r) \to Az$ $(r \to \infty)$. Det elektriske feltet blir da

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -A = E_0$$

som betyr at $\underline{\underline{A = -E_0}}$

Siden det elektriske feltet inne i en metallkule er lik null innebærer det at potentensialet er konstant innenfor og da også konstant langs overflaten. En får derfor

$$V(R) = Az + B\frac{\cos\theta}{R^2} = \left(AR + \frac{B}{R^2}\right)\cos\theta = \text{konst} = 0$$

(konst = 0 her p.g.a. den gitte θ-avhengigheten.) Dette gir så

$$AR + \frac{B}{R^2} = 0$$

$$B = -AR^3 = \underline{\underline{R^3 E_0}}$$

c) Det elektriske feltet vil stå normalt på metalloverflaten, derfor bidrar bare radialkomponenten til flateladningen

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta = \left(-A + \frac{2B}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$= \left(E_0 + 2E_0\left(\frac{R}{r}\right)^3\right)\cos\theta \xrightarrow[r \to R]{} 3E_0\cos\theta$$

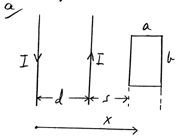
Tettheten av induserte overflateladninger blir følgelig

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \underline{\underline{3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta}}$$

slik at $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$.

Oppgave 2.

a)



Potensialforskjellen mellom de 2 lederne vil være

$$\Delta V = V(d-R) - V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-R}{R} - \ln\frac{d}{d-R}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)}} \quad \left(\approx \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{R}\right)}}\right)$$

Ladning på stykke av lengde l

$$\varphi = \lambda l$$

Kapasitansen blir følgelig $(d \gg R)$

$$C = \frac{\varphi}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)} \approx \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(d/R)}}}$$

b) Magnetfeltet mellom lederne (rettet opp av papirplanet og vinkelrett dette) finnes ved å addere feltene fra hver av lederne. Med det gitte uttrykket har en da

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Magnetisk fluks gjennom sløyfe av lengde l blir følgelig

$$\phi_m = \int \vec{B}\, d\vec{A} = l\int_R^{d-R} B\,dx = l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)dx$$

$$= \frac{l\mu_0 I}{2\pi}\Big|_R^{d-R}\left[\ln x - \ln(d-x)\right] = \frac{l\mu_0 I}{2\pi}2\left(\ln(d-R) - \ln R\right)$$

$$= \underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-R}{R}} \approx \underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln(d/R)}$$

Selvinduktansen av sløyfen (ledningsstykket) blir følgelig

$$L = \frac{\varphi_m}{I} \approx \underline{\underline{\frac{l\mu_0}{\pi}\ln(d/R)}}$$

[Merk at $(L/l)(C/l) = \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ der c er lyshastigheten. c er da også forplantningshastigheten til elektriske signaler (bølger) langs ledningsparet.]

c) Magnetfeltet i den rektangulære strømsløyfen blir som funnet under punkt b) men med $d+s<x<d+s+a$. Med sløyfe av lengde b blir nå fluksen gjennom denne

$$\varphi_m = \int \vec{B}\, d\vec{A} = b\int_{d+s}^{d+s+a} B\,dx = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\Big|_{d+s}^{d+s+a}\left[\ln x - \ln(d-x)\right]$$

$$= \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d+s+a}{d+s}\right) - \ln\frac{s+a}{s}\right] = \underline{\frac{b\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}$$

Har så

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin\omega t$$

Indusert elektromotorisk kraft blir dermed

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \underline{\underline{\frac{b\mu_0\omega I_0}{2\pi}\sin\omega t\ \ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}}$$

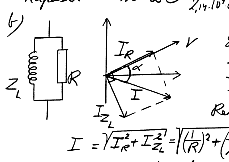
Oppgave 3.

a) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3400\,s^{-1} = \underline{2{,}14\cdot 10^4\,s^{-1}}$

Med dette finner en:

		Impedans	Fasevinkel
Motstanden:	$Z = R =$	$\underline{\underline{8{,}0\,\Omega}}$	$\underline{\underline{\alpha = 0}}$
Induktansen:	$Z = \omega L = 2{,}14\cdot 10^4 \cdot 0{,}45\cdot 10^{-3}\,\Omega =$	$\underline{\underline{9{,}6\,\Omega}}$	$\alpha = \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{90^\circ}}$
Kapasitansen:	$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1\,\Omega}{2{,}14\cdot 10^4 \cdot 0{,}24\cdot 10^{-9}} =$	$\underline{\underline{1{,}95\cdot 10^5\,\Omega}}$	$\alpha = -\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-90^\circ}}$

b)



En har strømmene

$$I_R = \frac{1}{R}V$$

$$I_{Z_L} = \frac{1}{X}V$$

Resulterende strøm blir da

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_{Z_L}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2}\, V = \frac{1}{Z}V$$

Impedansen blir følgelig

$$Z = \left(\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}\right)^{-1} = \frac{R\cdot X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{3{,}0\cdot 4{,}0\,\Omega}{\sqrt{3{,}0^2 + 4{,}0^2}} = \underline{\underline{2{,}4\,\Omega}}$$

Fasevinkel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_{Z_L}}{I_R} = \frac{1/X}{1/R} = \frac{R}{X} = \frac{3}{4} = \underline{0{,}75}$

$$\alpha = \underline{\underline{36{,}9^\circ}}$$

Alternativt med komplekse tall:

Parallellkopling: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} \Rightarrow Z = \frac{RZ_L}{R + Z_L} =$

$$\frac{RiX}{R+iX} = \frac{RX}{X - iR} = |Z|e^{i\alpha}, \text{ dvs. } |Z| = \frac{RX}{(R^2+X^2)^{1/2}}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{X}.$$