NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG TIL

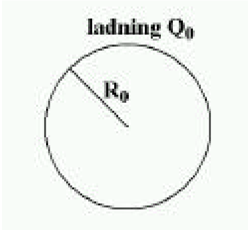
EKSAMEN I FAG SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

Onsdag 12. desember 2001

kl. 0900-1400

Eksamen bestod av 10 deloppgaver som alle teller like mye under bedømmelsen, 10 poeng pr deloppgave, 100 poeng oppnåelig totalt.

OPPGAVE 1



a) I elektrostatisk likevekt må vi ha **E** = 0 inne i kula. Hvis ikke ville det virke krefter **F** = q **E** på mobile ladninger, og vi ville få en elektrisk strøm. Vi legger så en lukket Gaussflate i sin helhet innenfor kulas overflate. Med **E** = 0 overalt på denne flaten gir Gauss lov

$$q = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0\,,$$

dvs nettoladningen q = 0 innenfor Gaussflaten. Vi kan legge Gaussflaten vår så nær inntil kulas overflate som vi vil, så konklusjonen må bli at hele nettoladningen Q_0 er plassert på kulas overflate. Av symmetrigrunner må dessuten ladningen være jevnt fordelt på overflaten.
For å bestemme **E** utenfor metallkula tar vi en sfærisk Gaussflate, konsentrisk med metallkula, og med radius r. Gauss lov gir da:

$$\oint E \cdot dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (r \geq R_0)$$

der **E** av symmetrigrunner må være radielt rettet, og utover dersom $Q_0 > 0$.

b) Vi har sammenhengen $\mathbf{E} = -\nabla V$ mellom elektrostatisk felt og elektrisk potensial. Her har vi sfærisk symmetri, dvs ingen vinkelavhengighet i **E** eller V, dvs **E** = -(dV/dr)$\mathbf{e}_r$. Dermed:

$$V(r) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr' = \int_{r}^{\infty} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}dr' = \underline{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{K_1 Q_0}{r}} \qquad (r \geq R_0)$$

dvs $K_1 = \underline{1/(4\pi\varepsilon_0)}$.

Inne i kula:
E = 0 $\Rightarrow$ dV/dr = 0 $\Rightarrow$ V = konstant
Kontinuerlig V $\Rightarrow$ $V(r < R_0) = \underline{K_1 Q_0/R_0}$. ($= Q_0/(4\pi\varepsilon_0 R_0)$).

Potensiell energi U_0 = totalt arbeid for å øke kulas ladning fra 0 til Q_0

$$\Rightarrow U_0 = \int_0^{Q_0} v(q)dq = \int_0^{Q_0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}dq = \left. \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_0} \right|_0^{Q_0} = \underline{\frac{Q_0^{\,2}}{8\pi\varepsilon_0 R_0}} = \frac{K_2 Q_0^{\,2}}{R_0}$$

dvs $K_2 = \underline{1/(8\pi\varepsilon_0)}$.

(Alternativ løsningsmetode: Energi pr volumenhet i det elektrostatiske feltet er u = ½ $\varepsilon_0 E^2$. Ved å integrere u over hele volumet oppnås samme potensielle energi U_0.)

c) Fra punkt b har vi at potensialet på de to kulene er hhv $V_1 = K_1 Q_1/R_0$ og $V_2 = K_1 Q_2/R_0$. Med spenningsfall RI over motstanden og LdI/dt over spolen, samt potensialforskjell $\Delta V = V_2 - V_1$ mellom kulene, har vi:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = K_1 \frac{Q_2}{R_0} - K_1 \frac{Q_1}{R_0} = \frac{K_1}{R_0}(2Q_0 - q - Q_0 - q) = \frac{K_1}{R_0}(Q_0 - 2q)$$

$$\Rightarrow RI + L\dot{I} = \Delta V = \frac{K_1}{R_0}(Q_0 - 2q)$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{2K_1}{R_0} q = \frac{K_1 Q_0}{R_0}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{2K_1}{LR_0} q = \frac{K_1 Q_0}{LR_0}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{g = \frac{R}{2L}} \qquad \underline{w_0 = \sqrt{\frac{2K_1}{LR_0}} = \sqrt{\frac{1}{2pe_0 LR_0}}} \qquad \underline{h_0 = \frac{K_1 Q_0}{LR_0} = \frac{Q_0}{4pe_0 LR_0}}$$

For å bestemme z_1 og z_2 er det enkleste å prøve med exp(zt) som løsning av den homogene ligningen:

$$\Rightarrow (z^2 + 2gz + w_0^{\ 2})e^{zt} = 0$$

$$\Rightarrow z = \underline{-g \pm \sqrt{g^2 - w_0^{\ 2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{z_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}}} \qquad \underline{z_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}}}$$

Alternativt kunne vi rett og slett ha satt inn den oppgitte løsningen i den oppgitte ligningen for q:

$$\dot{q} = bz_1 e^{z_1 t} + cz_2 e^{z_2 t}$$

$$\ddot{q} = bz_1^{\ 2} e^{z_1 t} + cz_2^{\ 2} e^{z_2 t}$$

$\Rightarrow$

$$(z_1^{\ 2} + 2gz_1 + w_0^{\ 2})be^{z_1 t} + (z_2^{\ 2} + 2gz_2 + w_0^{\ 2})ce^{z_2 t} + w_0^{\ 2} a = h_0$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{h_0}{w_0^{\ 2}} = \underline{\frac{Q_0}{2}} \quad , \quad z_{1,2} = \underline{-g \pm \sqrt{g^2 - w_0^{\ 2}}}$$

På denne måten får vi også fastlagt a direkte. En kan alternativt innse direkte hva a må bli på følgende måte:

$t \to \infty$: $q \to Q_0/2$ (like ladninger på kule 1 og 2 i likevekt)

$\Rightarrow Q_0/2 = a + 0 + 0$

$\Rightarrow \underline{a = Q_0/2}$

Til slutt bruker vi grensebetingelser for q og I = dq/dt for å fastlegge b og c:
Ved t=0: q = 0 og I = 0

$$\Rightarrow a+b+c=0 \quad \text{og} \quad bz_1 + cz_2 = 0$$

$$\Rightarrow c = -b-a = -\left(b+\frac{Q_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow bz_1 - \left(b+\frac{Q_0}{2}\right)z_2 = 0$$

$$\Rightarrow b = \underline{\frac{Q_0 z_2}{2(z_1-z_2)}}$$

$$\underline{= \frac{Q_0}{4\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{2K_1}{LR_0}}}\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{2K_1}{LR_0}}\right)}$$

$$c = -b-\frac{Q_0}{2} = -\frac{Q_0 z_2}{2(z_1-z_2)} - \frac{Q_0(z_1-z_2)}{2(z_1-z_2)} = \underline{-\frac{Q_0 z_1}{2(z_1-z_2)}}$$

$$\underline{= \frac{Q_0}{4\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{2K_1}{LR_0}}}\left(\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{2K_1}{LR_0}}\right)}$$

d) Denne oppgaven kan løses på to måter, en enkel og en litt mer omstendelig.
Den enkle først:
Vi har allerede slått fast at i likevekt er $Q_1 = Q_2 = 3Q_0/2$.
Potensiell energi for $t \le 0$: $U_i = U_1 + U_2 = K_2Q_0^2/R_0 + K_2(2Q_0)^2/R_0 = 5\, K_2Q_0^2/R_0 = 5U_0$
Potensiell energi for $t \to \infty$: $U_f = 2\, K_2(3Q_0/2)^2/R_0 = 9U_0/2$
Reduksjonen i potensiell energi må ha blitt tapt som varme i motstanden, altså:
$\Delta U_{varme} = U_i - U_f = \underline{½\, U_0} = ½\, K_2Q_0^2/R_0 = \underline{Q_0^2/(16\pi\varepsilon_0 R_0)}$

Den omstendelige metoden går ut på å beregne varmetapet direkte, dvs å regne ut

$$\Delta U_{\text{varme}} = \int_0^\infty RI(t)^2\,dt$$

ettersom instantan effekt i motstanden er $P(t) = RI(t)^2$.

$$I = bz_1 e^{z_1 t} + cz_2 e^{z_2 t}$$
$$\Rightarrow I^2 = (bz_1)^2 e^{2z_1 t} + (cz_2)^2 e^{2z_2 t} + 2bcz_1 z_2 e^{(z_1+z_2)t}$$
$$\Rightarrow \Delta U_{\text{var}\,me} = R\int_0^\infty dt\left[(bz_1)^2 e^{2z_1 t} + (cz_2)^2 e^{2z_2 t} + 2bcz_1 z_2 e^{(z_1+z_2)t}\right]$$
$$= R\left(-\frac{b^2 z_1{}^2}{2z_1} - \frac{c^2 z_2{}^2}{2z_2} - \frac{2bcz_1 z_2}{z_1+z_2}\right)$$
$$= -R\left(\frac{1}{2}b^2 z_1 + \frac{1}{2}c^2 z_2 + \frac{2bcz_1 z_2}{z_1+z_2}\right)$$
$$= -\frac{RQ_0{}^2}{8}\left(\frac{z_1 z_2{}^2 + z_1{}^2 z_2}{(z_1-z_2)^2} - \frac{4z_1{}^2 z_2{}^2}{(z_1+z_2)(z_1-z_2)^2}\right)$$
$$= -\frac{RQ_0{}^2}{8}\frac{z_1 z_2}{(z_1-z_2)^2}\left(\frac{(z_2+z_1)(z_1+z_2)}{z_1+z_2} - \frac{4z_1 z_2}{z_1+z_2}\right)$$
$$= -\frac{RQ_0{}^2}{8}\frac{z_1 z_2}{(z_1-z_2)^2}\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1+z_2}$$
$$= -\frac{RQ_0{}^2}{8}\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}$$

der vi har brukt at

$$b^2 = \frac{Q_0{}^2 z_2{}^2}{4(z_1-z_2)^2} \quad , \quad c^2 = \frac{Q_0{}^2 z_1{}^2}{4(z_1-z_2)^2} \quad , \quad bc = -\frac{Q_0{}^2 z_1 z_2}{4(z_1-z_2)^2}$$

Endelig har vi:

$$z_1 z_2 = \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\cdots}\right)\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\cdots}\right) = \frac{R^2}{4L^2} - \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}\right) = \frac{2K_1}{LR_0} = \frac{4K_2}{LR_0}$$
$$z_1 + z_2 = -\frac{R}{L}$$

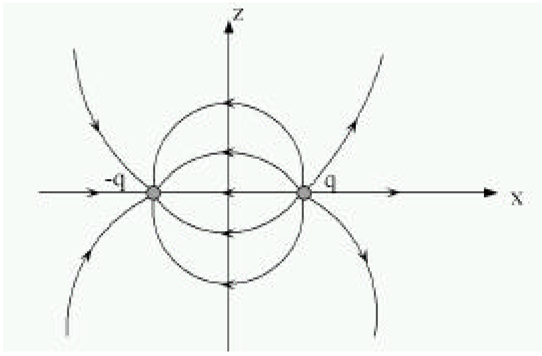
slik at

$$\Delta U_{\text{var}me} = -\frac{RQ_0{}^2}{8}\frac{\frac{4K_2}{LR_0}}{\left(-\frac{R}{L}\right)} = \frac{K_2 Q_0{}^2}{2R_0} = \underline{\frac{1}{2}U_0}$$

<u>OPPGAVE 2</u>

a)

Feltlinjer for det elektriske feltet i xz-planet:



På x-aksen:

$$\vec{E}(x) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (x+a)^2}\frac{x+a}{|x+a|}\hat{x} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)^2}\frac{x-a}{|x-a|}\hat{x}$$

$$\underline{= \frac{-q\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|}\right)}$$

$$x >> a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} = \frac{(x-a)^2 - (x+a)^2}{(x+a)^2 (x-a)^2} = -\frac{4ax}{(x+a)^2(x-a)^2} \approx -\frac{4a}{x^3}$$

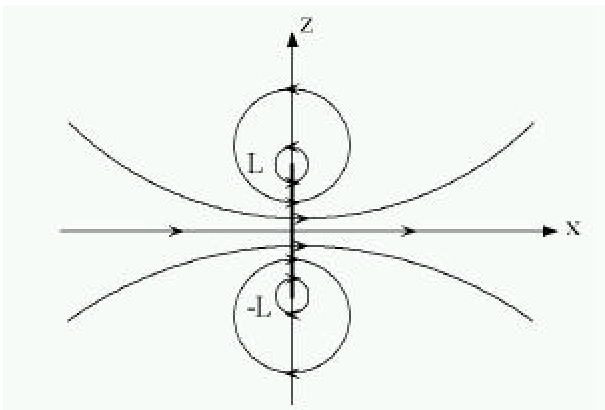
$$x << -a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} = -\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{4ax}{(x+a)^2(x-a)^2} \approx \frac{4a}{x^3}$$

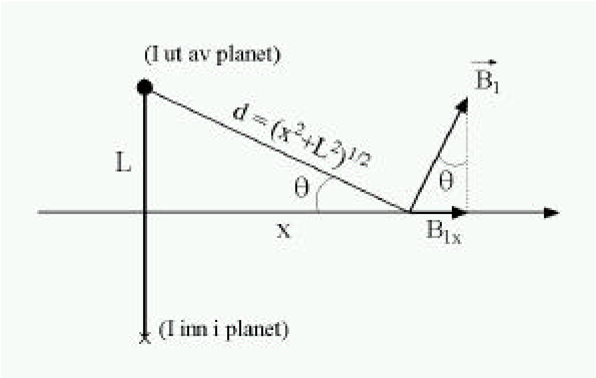
$$\Rightarrow |x| >> a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} \approx \frac{4a}{|x|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x) \approx \frac{4qa\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0 |x|^3} = \underline{\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 |x|^3}} \qquad \text{da} \qquad \vec{p} = q \cdot 2a\hat{x}$$

b)

Feltlinjer for magnetfeltet i xz-planet:





Magnetfelt fra *en* sidekant:

$$B_1 = \frac{m_0 I}{2pd}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2}{L^2}}} = \frac{m_0 I}{2p\sqrt{x^2+L^2}}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{x^2}{L^2}}}$$

De 4 sidekantene bidrar med samme B_1 på x-aksen, og parvis med retning slik at

$$\vec{B} = 4B_{1x}\hat{x}$$

med

$$B_{1x} = B_1 \sin q = B_1\frac{L}{d} = B_1\frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

Dermed:

$$\vec{B} = \frac{4m_0 I}{2p\sqrt{x^2+L^2}}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{x^2}{L^2}}}\frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\hat{x} = \underline{\frac{2m_0 IL}{p\left(x^2+L^2\right)\sqrt{2+\frac{x^2}{L^2}}}\hat{x}}$$

$$|x| >> L : x^2 + L^2 \approx x^2 \quad , \quad \sqrt{2+\frac{x^2}{L^2}} \approx \frac{|x|}{L}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \approx \frac{2m_0 IL^2}{p|x|^3}\hat{x} = \underline{\frac{m_0\vec{m}}{2p|x|^3}} \quad \text{da} \quad \vec{m} = I\vec{A} = 4IL^2\hat{x}$$

c)

Først E-feltet:

$$|x| << a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} = \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2}\left(1-2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\cdots\right)$$

$$\frac{1}{(x-a)|x-a|} = -\frac{1}{(x-a)^2} = -\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-2} = -\frac{1}{a^2}\left(1+2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{q\hat{x}}{4pe_0 a^2}\left(1-2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\cdots+1+2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\cdots\right) \approx \hat{x}\left(-\frac{q}{2pe_0 a^2}\right)\left(1+\frac{3}{a^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow E_0 = \underline{-\frac{q}{2pe_0 a^2}} \quad , \quad a = \underline{\frac{3}{a^2}} \quad , \quad n = \underline{2}$$

Deretter B-feltet:

$$|x| << a : \left(x^2 + L^2\right)^{-1} = \frac{1}{L^2}\left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)^{-1} = \frac{1}{L^2}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\cdots\right)$$

$$\left(2 + \frac{x^2}{L^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{2L^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x^2}{4L^2}\cdots\right)$$

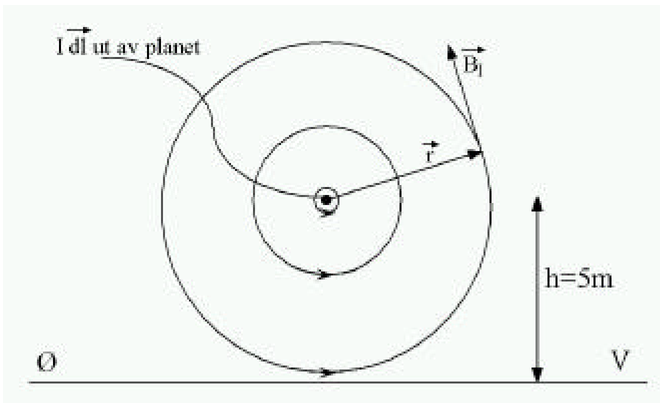
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{2m_0 IL}{pL^2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{4L^2}\cdots\right)\hat{x} \approx \hat{x}\left(\frac{\sqrt{2}m_0 I}{pL}\right)\left(1 - \frac{5}{4L^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow B_0 = \underline{\frac{\sqrt{2}m_0 I}{pL}} \quad , \quad b = \underline{-\frac{5}{4L^2}} \quad , \quad m = \underline{2}$$

OPPGAVE 3

a)

$\vec{B}_I \propto Id\vec{l} \times \vec{r} \Rightarrow$ sirkulære feltlinjer, konsentriske med kabelen:

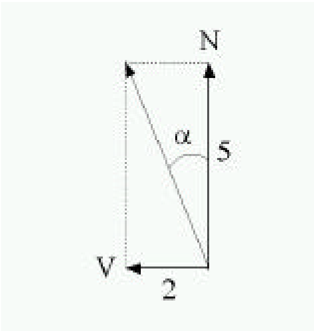


Her kan B(h) utledes fra Amperes lov, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = m_0 I \Rightarrow B \cdot 2ph = m_0 I$. Alternativt kan en bruke det oppgitte uttrykket for B i oppgave 2, med $L \to \infty$. Et tredje alternativ er å slå opp i Øgrim og Lian: $H = \frac{I}{2ph}, B = m_0 H = \frac{m_0 I}{2ph}$. Endelig kan B(h) beregnes direkte fra uttrykket for magnetfelt fra strømførende leder, gitt i formelvedlegget.

Ved bakken:

$$B_I = \frac{4p \cdot 10^{-7} \cdot 400}{2p \cdot 5}\mathrm{T} = \underline{1.6 \cdot 10^{-5}\mathrm{T}}$$

Retning på $\vec{B}_I$ (se figuren over): mot vest.



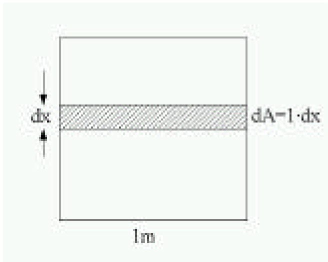
1m over bakken:

$$B_I = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400}{2\pi \cdot 4}\,\mathrm{T} = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}\left(\hat{\mathrm{V}}\right)$$

$$B_J = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}\left(\hat{\mathrm{N}}\right)$$

Avvik i forhold til nord: tanα=2/5 $\Rightarrow$ α=21.8° ≈ <u>22°</u>

b)



E(t) = -dϕ_B/dt , ϕ_B = N $\int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ (kan se bort fra $\vec{B}_J$ da $\dot{\vec{B}}_J = 0$)

$$\Rightarrow \phi_B = \frac{N\mu_0 I}{2\pi}\cdot 1 \cdot \int_4^5 \frac{dx}{x} = \frac{N\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{5}{4} = \frac{N\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\frac{5}{4}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(t) = \underline{\frac{N\omega\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\frac{5}{4}\sin\omega t} = \frac{500\cdot 2\pi\cdot 50\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 800}{2\pi}\ln\frac{5}{4}\sin\omega t$$

$$= 8\pi\ln\frac{5}{4}\sin\omega t = \underline{(5.6\mathrm{V})\sin\omega t}$$

(Magnetfeltet endrer seg bare langsomt i vertikalretningen gjennom spolen. Vi gjør derfor bare en ubetydelig feil ved å sette

$$B_I \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi\langle x\rangle} \quad \text{med } \langle x\rangle = 4.5\text{m, og deretter}$$

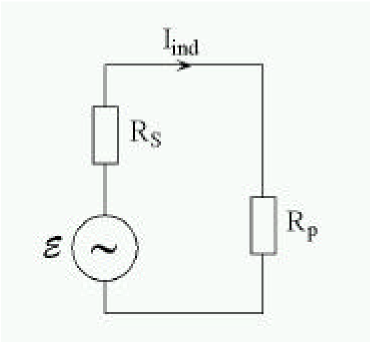
$$\phi_B \approx \frac{N\mu_0 I}{2\pi\langle x\rangle}\cdot A = \frac{500\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 800}{2\pi\cdot 4.5}\cdot 1\,\mathrm{Tm}^2\cdot\cos\omega t$$

)

c)

$$R_S = \frac{l}{\sigma S} = \frac{4\mathrm{m}\cdot 500}{5.8\cdot 10^7\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}\cdot 3.45\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = \underline{10\Omega}$$

Kretsen blir altså en vekselspenningskilde med indre motstand R_S, koblet til en motstand R_p:



Indusert strøm i kretsen:

$$I_{ind}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R_S + R_p} = \left(\frac{5.6}{20}\text{A}\right)\sin \omega t$$

$$\Rightarrow P(t) = V_p(t) I_{ind}(t) = R_p I_{ind}(t)^2 = \frac{R_p}{(R_S + R_p)^2}\mathcal{E}(t)^2$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{\omega}{2\pi}\frac{R_p}{(R_S + R_p)^2}\cdot(5.6\text{V})^2\cdot\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{40\Omega}\cdot 5.6^2\,\text{V}^2 = \underline{0.39\text{W}}$$

(der det er brukt at $\sin \omega t = ½\,(1 – \cos 2\omega t)$, slik at integralet blir π/ω)

(Kommentar: En slik spole vil ha en ikke ubetydelig selvinduktans L, slik at det induktive bidraget til impedansen, ωL, egentlig ikke kan neglisjeres ved den aktuelle frekvensen. Det betyr at oppnåelig effekt i lyspæra blir enda mindre enn det som er beregnet ovenfor. Ettersom L er proporsjonal med kvadratet av antall viklinger, ville det ha vært lurere å bruke større areal og færre viklinger på spolen. Alternativt kunne det induktive bidraget til impedansen blitt eliminert fullstendig ved i tillegg å seriekoble en kapasitans, slik at $\omega L – 1/\omega C = 0$.)