NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG TIL

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

Mandag 29. juli 2002

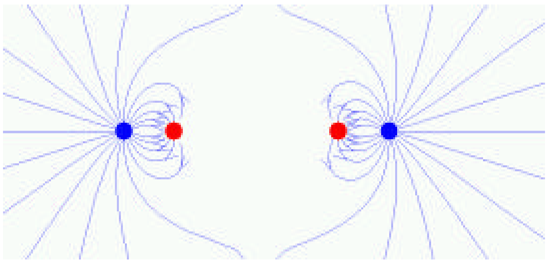
kl. 0900-1400

Eksamen bestod av 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen, 10 poeng pr deloppgave, 100 poeng oppnåelig totalt.

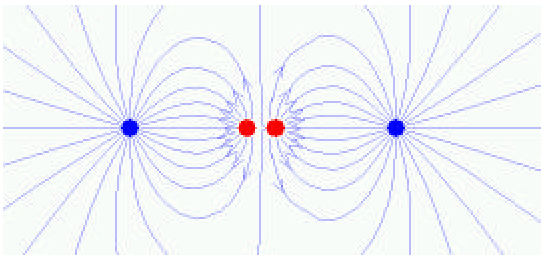
OPPGAVE 1

a) Litt avhengig av hvordan en velger b i forhold til a vil feltlinjene for **E** på nært hold bli seende omtrent slik ut:

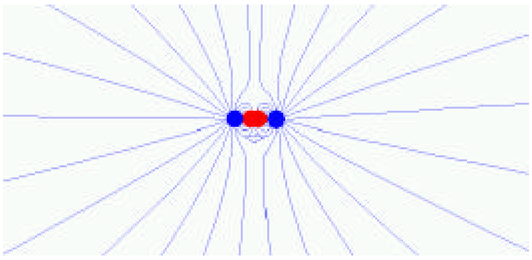
b<a:



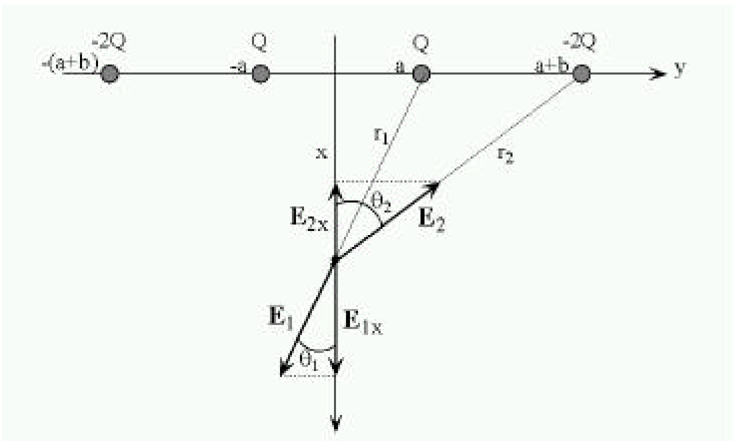
b>a:



(Her er det brukt en ”java applet” for å tegne feltlinjer, se http://www.schulphysik.de/java/physlet/applets/efeld2.html.)
Et poeng her er at det er dobbelt så mange feltlinjer inn mot ladningene –2Q (blå) som antall feltlinjer ut fra ladningene +Q (røde).
På lang avstand vil systemet essensielt se ut som en punktladning med netto ladning Q+Q–2Q–2Q = –2Q, og feltlinjene blir tilnærmet rette og radielle:



b)



Av symmetrigrunner må **E** på x-aksen peke langs x-aksen ettersom y-komponentene av det elektriske feltet fra ladningene i ±a og ±(a+b) parvis opphever hverandre. Videre vil selvsagt **E**(-x) være motsatt rettet **E**(x), så det er tilstrekkelig å betrakte forholdene på den ene siden av y-aksen, f.eks. x>0 som i figuren over.
Avstandene fra ladningene Q og –2Q til et punkt på x-aksen er henholdsvis $r_1 = (x^2 + a^2)^{1/2}$ og $r_2 = (x^2 + (a+b)^2)^{1/2}$. Coulombs lov gir dermed:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + a^2\right)}$$ med retning som angitt i figuren.

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + (a+b)^2\right)}$$

Komponentene langs x-aksen fås ved å multiplisere E_1 og E_2 med henholdsvis cos $\theta_1 = x/r_1$ og cos $\theta_2 = x/r_2$. Endelig må vi huske på å få med bidragene fra ladningene i –a og –(a+b), slik at det totale feltet på x-aksen blir, med $\mathbf{E}(x) = E_x\,\hat{x}$:

$$E_x = 2E_1\cos\theta_1 - 2E_2\cos\theta_2 = \frac{Qx}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} - \frac{2Qx}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + (a+b)^2\right)^{3/2}} =$$

$$\underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} - \frac{2x}{\left(x^2 + (a+b)^2\right)^{3/2}}\right)}$$

Sammenhengen mellom **E** og potensialet V er gitt ved **E** = –∇V, så hvis vi velger V = 0 når x → ∞, har vi:

$$V(x) = -\int_\infty^x E_x dx = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^x\left(\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} - \frac{2x}{\left(x^2 + (a+b)^2\right)^{3/2}}\right)dx =$$

$$-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\Big|_\infty^x\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (a+b)^2}}\right) =$$

$$\underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + (a+b)^2}}\right)}$$

For $x \gg a,b$ kan vi neglisjere a^2 og $(a+b)^2$ i forhold til x^2 i nevnerne i uttrykket for E_x, slik at

$$E_x \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{x^3} - \frac{2x}{x^3}\right) = \underline{-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 x^2} = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$$

dvs som for en punktladning –2Q plassert i x = 0, som forventet!

(Kommentar: Her hadde det vært enklere å bestemme V(x) først, siden V er en skalar størrelse. Med V(x) bestemt, finnes **E**(x) av relasjonen **E**(x) = –∇V(x).)

c) Av symmetrigrunner blir nettokraften lik null dersom punktladningen q plasseres i origo. Vi ser også at $E_x(0) = 0$ fra uttrykket funnet ovenfor, altså konsistent med null kraft ettersom $F_x = q\,E_x$.
Hvorvidt testladningen q, etter en liten forskyvning bort fra origo, vil vende tilbake til origo eller ei bestemmes av retningen på kraften F_x, eller ekvivalent, fortegnet på E_x: Positiv E_x betyr en kraft i positiv x-retning, altså vil testladningen ikke trekkes tilbake mot origo. Vi må altså bestemme hvilke verdier av forholdet b/a som gir *negativ* E_x for små *positive* verdier av x, og samtidig *positiv* E_x for små *negative* verdier av x. (Vi ble jo enige om at det elektriske feltet måtte bli motsatt rettet når vi skiftet fortegn på x...!) Kravet vi må stille blir dermed at

dE_x/dx må være negativ i x = 0. Med sammenhengen mellom E_x og V blir dette det samme som å si at d^2V/dx^2 må være positiv i x = 0, altså at potensialet har et minimum i x = 0, et ikke ukjent kriterium for å avgjøre om en likevektsposisjon er stabil eller ikke! Nok snikksnakk, la oss regne ut dE_x/dx:

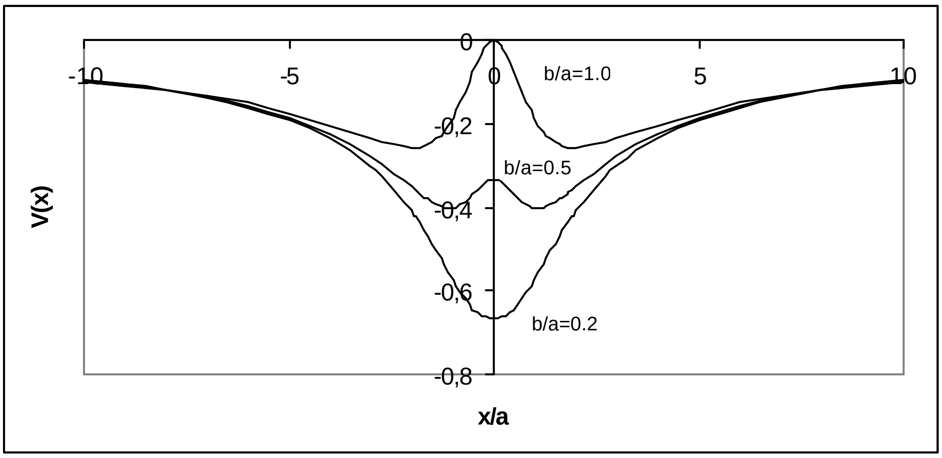
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} - \frac{\frac{3}{2}x\cdot 2x}{\left(x^2+a^2\right)^{5/2}} - \frac{2}{\left(x^2+(a+b)^2\right)^{3/2}} + \frac{\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot 2x}{\left(x^2+(a+b)^2\right)^{5/2}}\right)$$

For x = 0 reduserer dette seg til

$$\frac{dE_x(0)}{dx} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{2}{(a+b)^3}\right)$$

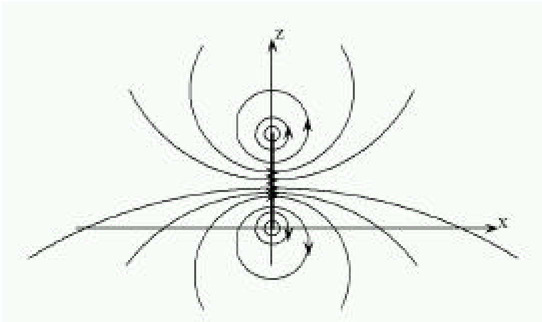
som er negativ dersom $2/(a+b)^3 > 1/a^3$, dvs $2^{1/3}a > a+b$, altså: <u>$b < (2^{1/3}-1)a \approx 0.26a$</u>

For at testladningen ikke skal forsvinne mot x = ∞, må den ha lavere total energi i x ≈ 0 enn dens potensielle energi i x = ∞. Hvis vi antar at testladningen slippes med null hastighet i nærheten av x = 0, betyr dette at vi må forlange at V(0) < V(∞) = 0. Ser vi på uttrykket for V(x) funnet under punkt b), betyr dette at 1/a – 2/(a+b) < 0, altså: <u>b < a</u>
Figuren nedenfor illustrerer potensialet V(x) for noen ulike verdier av forholdet b/a. Med b/a = 0.2 har vi kun en stabil likevektsposisjon, i x = 0. Med b/a = 0.5 har vi to stabile likevektsposisjoner, i $x = \pm(9/4-2^{2/3})/(2^{2/3}-1)a \approx \pm 1.13a$, mens x = 0 nå er et ustabilt likevektspunkt. Med b/a = 1.0 er potensialet i x = 0 akkurat stort nok til at testladningen kan ”unnslippe” dersom den gis en liten dytt bort fra origo.



OPPGAVE 2

a) Feltlinjene for **B** blir omtrent slik:



Det magnetiske momentet til ei lukket strømsløyfe er m = I **A**, der I er strømstyrken og **A** er en vektor normalt på arealet innenfor strømsløyfa og med størrelse lik dette arealet. Retningen på **A** er gitt ved høyrehåndsregelen, slik at m her peker i positiv x-retning og har størrelse $\underline{\mu = \frac{1}{2}\pi L^2 I}$.

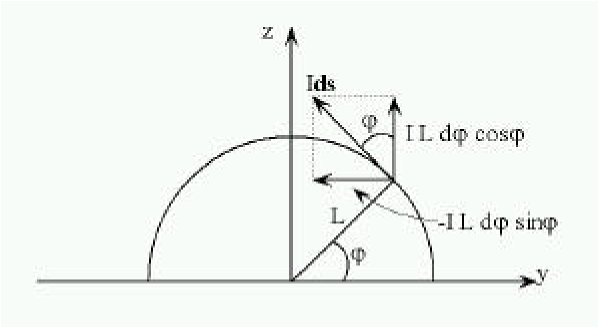
b) Bidraget $\mathbf{B}_1(x)$ fra strømsløyfas rette del blir som oppgitt i oppgaveteksten, med d erstattet av x:

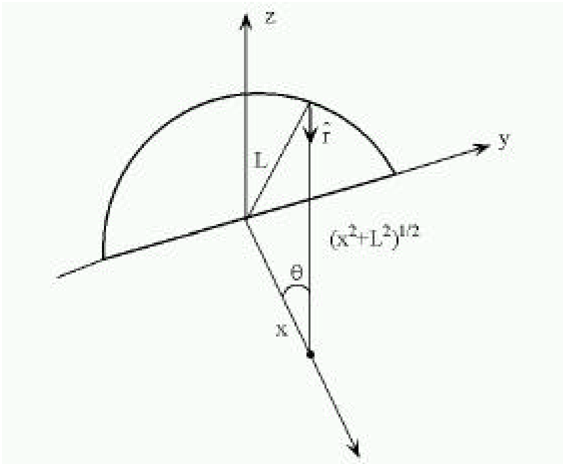
$$\mathbf{B}_1(x) = B_{1z}(x)\,\hat{z} = -\frac{m_0 IL}{2px\left(L^2 + x^2\right)^{1/2}}\,\hat{z}$$

Ettersom I**ds** for dette bidraget er en vektor i positiv y-retning og $\hat{r}$ ligger i xy-planet, må $\mathbf{B}_1 \sim I\mathbf{ds} \times \hat{r}$ peke i z-retningen, og nærmere bestemt i negativ z-retning hvis x > 0, og i positiv z-retning hvis x < 0. Vi ser at uttrykket for $\mathbf{B}_1(x)$ sørger for nettopp dette.
Bidraget $\mathbf{B}_2(x)$ fra sløyfas buede del må av symmetrigrunner bli en vektor i xz-planet, dvs $\mathbf{B}_2(x) = B_{2x}(x)\,\hat{x} + B_{2z}(x)\,\hat{z}$. Her kan vi skrive ned x-komponenten direkte: Den må bli halvparten av det oppgitte uttrykket for ei sirkulær strømsløyfe, igjen med d erstattet av x:

$$B_{2x}(x) = \frac{m_0 IL^2}{4\left(L^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Høyrehåndsregelen gir *positiv* B_{2x} både for positiv og negativ x, så uttrykket er gyldig langs hele x-aksen. [Alternativt kan en overbevise seg om fortegnet på B_{2x} ved å studere $I\mathbf{ds} \times \hat{r}$ f.eks. der halvsirkelen krysser z-aksen: Her er **ds** = –ds $\hat{y}$ mens $\hat{r} = r_x\hat{x} - r_z\hat{z}$ (positive ds, r_x og r_z), slik at $B_{2x} \sim$ ds $r_z > 0$.]
Da gjenstår det bare å bestemme z-komponenten $B_{2z}(x)$. Da sløyfa ligger i yz-planet, har vektoren I**ds** en y- og en z-komponent, men bare y-komponenten vil bidra til B_{2z}. Dermed innser vi også at vi bare trenger x-komponenten av $\hat{r}$. Før vi begynner å regne, la oss også bestemme fortegnet på B_{2z}: Langs hele halvsirkelen har vektoren I**ds** *negativ* y-komponent (unntatt i "hjørnene" på y-aksen, der y-komponenten er null). For punkter på den positive x-aksen har $\hat{r}$ *positiv* x-komponent, og på den negative x-aksen *negativ* x-komponent. Vektorproduktet $I\mathbf{ds} \times \hat{r}$ fører da til at $B_{2z}(x)$ må bli *positiv* for x > 0 og *negativ* for x < 0.





Lengden av bueelementet **ds** er Ldφ, slik at vektoren I**ds** får y-komponent lik -I Ldφ sinφ. Her er vinkelen φ målt i forhold til positiv y-akse, se figur til venstre. Lengden av $\hat{r}$ er lik 1 (enhetsvektor!), slik at x-komponenten til $\hat{r}$ blir lik cosθ = $x/(x^2+L^2)^{1/2}$, se figur til høyre. Fra denne figuren finner vi også faktoren $1/r^2 = 1/(x^2+L^2)$. Dermed kan vi skrive ned bidraget til z-komponenten av $\mathbf{B}_2$(x) fra et lite bueelement **ds** ved vinkelen φ:

$$dB_{2z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ILd\varphi\sin\varphi}{x^2+L^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ILxd\varphi\sin\varphi}{\left(x^2+L^2\right)^{3/2}}$$

Hele z-komponenten B_{2z} får vi endelig ved å integrere over halvsirkelen, dvs ved å integrere dB_{2z} fra φ = 0 til φ = π. Siden $\int \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi$, gir dette rett og slett en faktor (–cosπ + cos0) = 1+1 = 2, slik at

$$B_{2z} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\frac{x}{\left(x^2+L^2\right)^{3/2}}$$ (...med riktig fortegn, jfr diskusjonen ovenfor)

Alt i alt:

$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1(x) + \mathbf{B}_2(x) = B_{1z}(x)\,\hat{z} + B_{2x}(x)\,\hat{x} + B_{2z}(x)\,\hat{z}$ =

$$= \frac{\mu_0 IL^2}{4\left(L^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{x} + \left(\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\frac{x}{\left(x^2+L^2\right)^{3/2}} - \frac{\mu_0 IL}{2\pi x\left(L^2+x^2\right)^{1/2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 IL^2}{4\left(L^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{x} - \frac{\mu_0 IL^3}{2\pi x\left(L^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 IL^2}{2\left(L^2+x^2\right)^{3/2}}\left(\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{L}{\pi x}\hat{z}\right)$$

I det siste uttrykket trakk vi resultatet for ei sirkulær strømsløyfe utenfor parentesen.

c) For x ≪ L ser vi umiddelbart at z-komponenten til **B**(x) blir dominerende, for da er L/(πx) ≫ ½. Vi kan dessuten sette $(L^2 + x^2)^{3/2} \approx L^3$ slik at **B**(x) ≈ $-\mu_0 I/(2\pi x)\,\hat{z}$. Altså er eksponenten <u>m = 1</u>. Hadde vi fått et annet svar enn dette, burde vi straks være på vakt: Svært nær midten av den rette biten av strømsløyfa ser vi essensielt en uendelig lang rett leder, og som kjent (?) er magnetfeltet i avstand x fra en uendelig lang rett leder nettopp lik $\mu_0 I/(2\pi x)$.

For x ≫ L blir x-komponenten til **B**(x) dominerende, og $(L^2 + x^2)^{3/2} \approx x^3$ slik at **B**(x) ≈ $\mu_0 IL^2/(4x^3)\,\hat{x}$. Altså er eksponenten <u>n = 3</u>. Under punkt a) beregnet vi strømsløyfas magnetiske moment m = ½ $\pi L^2 I$, slik at for x ≫ L har vi **B**(x) ≈ $(\mu_0/2\pi)$ m/x^3. Dette er et helt generelt uttrykk for ”fjernfeltet” fra en magnetisk dipol i retning langs dipolens flatenormal, uavhengig av strømsløyfas geometriske form.

OPPGAVE 3

For to motstander R_1 og R_2 i serie er den totale motstanden $R = R_1 + R_2$, mens for to motstander i parallell er den totale motstanden bestemt ved $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, dvs $R = R_1R_2/(R_1+R_2)$. Dette husker antagelig de fleste. Hvis ikke bør det være en smal sak å utlede sammenhengene ved hjelp av Ohms lov og Kirchhoffs lover.
For kretsen i oppgaven har vi da: $1/R = 1/R_4 + 1/(R_1 + (1/R_2+1/R_3)^{-1}) = 1/R_4 + 1/(R_1 + R_2R_3/(R_2+R_3))$, altså

$$R = \frac{R_4\left(R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\right)}{R_4 + R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} = \underline{\frac{R_1R_4(R_2+R_3)+R_2R_3R_4}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_2R_3} = \frac{1\cdot 4\cdot(2+3)+2\cdot 3\cdot 4}{(1+4)(2+3)+2\cdot 3}\Omega = \frac{44}{31}\Omega \approx 1.4\Omega}$$

Vi har da umiddelbart at
$I_4 = E/R_4 =$ <u>5/4 A = 1.25A</u>

Dessuten må den totale strømmen være lik $I_{tot} = I_1 + I_4 = E/R = 155/44$ A = 3.52 A, dvs
$I_1 = (155/44 – 5/4)$A = <u>25/11 A = 2.27A</u>

Spenningsfallet over R_1 blir $V_1 = R_1I_1 = 25/11$ V, slik at spenningsfallet over R_2 og R_3 blir
$V_2 = V_3 = E – V_1 = (55\text{-}25)/11$ V = 30/11 V. De resterende strømstyrkene blir dermed
$I_2 = V_2/R_2 =$ <u>15/11 A = 1.36A</u>
$I_3 = V_3/R_3 =$ <u>10/11 A = 0.91A</u>

OPPGAVE 4

a) Med ladning q på kondensatoren og strømstyrke I blir spenningsfallene over kondensator, motstand og spole henholdvis q/C, RI og LdI/dt. Da totalt spenningsfall rundt hele kretsen må summere seg til null, får vi

$$q/C + RI + LdI/dt = 0$$

Med I = dq/dt gir dette

$$q/C + R\, dq/dt + L\, d^2q/dt^2 = 0$$

eller

$$d^2q/dt^2 + (R/L)dq/dt + (1/LC)q = 0$$

Dette er den oppgitte differensialligningen, med $\underline{\gamma = R/2L}$ og $\underline{\omega_0 = (1/LC)^{1/2}}$.

Før t = 0 går det ingen strøm i kretsen. Når bryteren lukkes ved t = 0, kan ikke strømmen plutselig bli forskjellig fra null. Det ville innebære at dI/dt $\to \infty$, altså et uendelig stort spenningsfall over spolen, hvilket ville være ufysikalsk.

b) Initialbetingelsene for q og I er q(0) = Q_0 og I(0) = $\dot{q}$ (0) = 0. Dermed:

$$q(0) = \underline{a = Q_0}$$

$$\dot{q}(t) = -gq(t) + e^{-gt}\left(-a\,w\sin wt + b\,w\cos wt\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{q}(0) = -gq(0) + b\,w = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{b = \frac{gQ_0}{w}}$$

c) Instantan effekt er gitt ved P = VI, som tilsvarer en energiendring dW = P dt = VI dt. Å øke strømmen gjennom en spole fra 0 til I tilsvarer derfor at det tilføres en energi (dvs: utføres et arbeid)

$$W = \int dW = \int VIdt = \int L\frac{dI}{dt}Idt = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Å endre ladningen på en kondensator fra 0 til q tilsvarer at det tilføres en energi

$$W = \int dW = \int \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = \int_0^q qdq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Når t $\to \infty$, vil både ladningen q på kondensatoren og strømmen I gjennom spolen gå mot null. For t $\leq$ 0 er I = 0 og q = Q_0, slik at den totale energien i systemet er <u>W = ½ Q_0^2/C</u>. I likevekt er all denne energien gått over til varme i motstanden. (Energibevarelse!)
Innser en ikke dette direkte, er det fullt mulig å regne ut dissipert energi i motstanden:

$$W = \int_0^\infty VIdt = \int_0^\infty R\dot{q}^2 dt$$

La oss først bestemme $\dot{q}^2$:

$$q = Q_0 e^{-gt}\left(\cos wt + \frac{g}{w}\sin wt\right)$$

$$\Rightarrow \dot{q} = Q_0 e^{-gt}\left(-g\cos wt - \frac{g^2}{w}\sin wt - w\sin wt + g\cos wt\right)$$

$$= -Q_0 e^{-gt}\frac{g^2 + w^2}{w}\sin wt = -Q_0 e^{-gt}\frac{w_0^2}{w}\sin wt$$

$$\Rightarrow \dot{q}^2 = \frac{Q_0^2 w_0^4}{w^2}e^{-2gt}\sin^2 wt$$

Integralet som må løses fant jeg som nr 131 på side 167 i min utgave av Rottmann:

$$\int_0^\infty e^{-2gt}\sin^2 wtdt = \frac{w^2}{4g\left(g^2 + w^2\right)} = \frac{w^2}{4gw_0^2}$$

(Ved omskrivning av $\sin^2\omega t$ til eksponentialfunksjoner er det heller ikke vanskelig å løse integralet uten hjelp av Rottmann...!)
Vi har dermed:

$$W = R\frac{Q_0^2 w_0^4}{w^2}\frac{w^2}{4g w_0^2} = \frac{RQ_0^2 w_0^2}{4g} = \frac{RQ_0^2\frac{1}{LC}}{4\frac{R}{2L}} = \underline{\frac{Q_0^2}{2C}}$$

(Kommentar til fortegnet på dq/dt: Av uttrykket for dq/dt ser vi at strømmen blir *negativ* etter at vi har lukket bryteren ved t = 0. Grunnen er denne: Spenningsfallet over en kondensator er positivt når vi går fra positivt til negativt ladet plate. For en motstand er spenningsfallet positivt når vi går i strømmens positive retning. I punkt a) valgte vi positivt fortegn både på q/C og RI da vi satte opp ligningen for spenningsfallet rundt kretsen. Det betyr at vi valgte strømretning som vist i figuren i oppgaveteksten, dvs med urviseren, og samtidig at øvre kondensatorplate har ladning $+Q_0$ og nedre plate ladning $-Q_0$. Men dersom Q_0 er positiv, må jo den elektriske strømmen da gå *mot* urviseren etter at vi har lukket bryteren. Altså blir I *negativ*, som beregnet.)