NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 90 67 89 43

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
Fredag 15. august 2003 kl. 0900 - 1500

Eksamen bestod av 10 deloppgaver (1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a, 6b) som alle telte like mye under bedømmelsen.

OPPGAVE 1

i. D. (Null elektrostatisk felt inne i metall eliminerer A og C. Kulesymmetrisk ladningsfordeling gir radielt rettede feltlinjer.)

ii. A. (Null felt i metall eliminerer C og D. Polarisering i plastlaget resulterer i redusert elektrisk feltstyrke her, altså mindre tetthet av feltlinjer her enn i den omgivende lufta.)

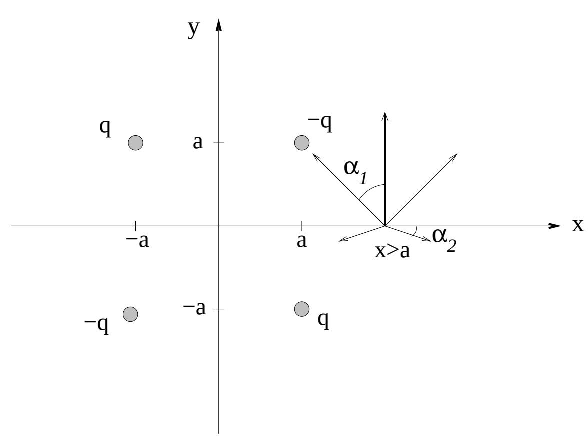
iii. D. (Hver metallplate er en ekvipotensialflate. Det dielektriske materialet vil riktignok polariseres, men fri ladning på platene vil fordele seg slik at det elektriske feltet (= potensialforskjellen mellom platene dividert med plateavstanden) blir like stort overalt mellom platene. Null felt utenfor platene: Like stort bidrag, med motsatt retning, fra de to platene.)

iv. D. (Magnetiske feltlinjer alltid lukkede. Symmetrien tilsier dessuten sirkulære feltlinjer.)

v. D. (Null elektrostatisk felt inne i metall eliminerer A og C. Polarisering i plasten reduserer feltet her med en faktor $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 10$ i forhold til om vi hadde luft eller vakuum. Feltet faller av som $1/r^2$, men dette gir bare en reduksjonsfaktor på $(5/4)^2/(5/2)^2 = 1/4$ når vi sammenligner B og D. Dermed blir feltet størst i posisjon D.)

OPPGAVE 2

I punktet $(x, 0)$ $(x > a)$ bidrar ladningene med parvis like store felt (i absoluttverdi), og med retninger som vist i figuren:



Vektorsummen av de fire tynne vektorene gir tilsammen et elektrisk felt som peker i positiv y-retning.

Feltet må ha samme retning overalt på x-aksen sålenge $x > 0$. For å bestemme $E(x)$ på x-aksen for $x > a$, trenger vi derfor bare y-komponenten av de fire bidragene. Ladningene bidrar med parvis like store y-komponenter, så det holder å regne ut to stykker, f.eks. fra de to øverste ladningene. Avstanden til ladningen i $(-a, a)$ er $\sqrt{a^2 + (x+a)^2}$, mens avstanden til ladningen i (a, a) er $\sqrt{a^2 + (x-a)^2}$. y-komponentene får vi ved å multiplisere med henholdsvis $\sin\alpha_2$ og $\cos\alpha_1$, se figuren. Figurbetraktning gir at disse faktorene er hhv $a/\sqrt{a^2 + (x+a)^2}$ og $a/\sqrt{a^2 + (x-a)^2}$. Endelig må vi passe på at de to bidragene får motsatt fortegn. Vi finner:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + (x-a)^2\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + (x+a)^2\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x+a)^2}}\right) \\
&= \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2 - 2ax + 2a^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + 2ax + 2a^2)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

OPPGAVE 3

a) På den positive ladningen virker feltet med en kraft $q\boldsymbol{E} = qE\hat{x}$ mens den negative ladningen påvirkes av en kraft $-q\boldsymbol{E} = -qE\hat{x}$. Altså blir total kraft på dipolen lik null. Dreiemomentet om aksen som går normalt gjennom dipolens midtpunkt blir:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \\
&= \frac{\boldsymbol{a}}{2} \times q\boldsymbol{E} + \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right) \times (-q\boldsymbol{E}) \\
&= q\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} \\
&= \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

som skulle vises.

b) Vi har oppgitt at $\tau = -dU/d\theta$, slik at om dipolen dreies en vinkel $d\theta$, blir endringen i dens potensielle energi lik $dU = -\tau d\theta$. Fra uttrykket i punkt a) kan vi finne sammenhengen mellom τ og θ:

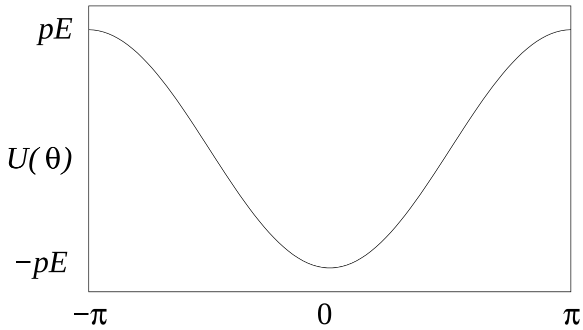
$$\tau = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE\sin\theta$$

(Positiv retning på θ er angitt i figuren i oppgaveteksten.)

Potensiell energi relativt til en vilkårlig valgt referansevinkel θ_0 blir dermed:

$$U(\theta) = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta' = pE\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta' d\theta' = -pE\cos\theta + pE\cos\theta_0 = -pE\cos\theta (= -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$$

der vi valgte $\theta_0 = \pi/2$.
Skisse av $U(\theta)$:



Dielektriske medier består nettopp av slike elektriske dipoler på atomært eller molekylært nivå, enten permanente eller indusert av det ytre elektriske feltet. Vi ser at dipolene vil få en tendens til å rette seg inn langs det påtrykte feltet ettersom det tilsvarer lavest potensiell energi ($\theta = 0$). Dipolene setter da selv opp et elektrisk felt motsatt rettet det ytre feltet. Nettoeffekten blir at det *totale* elektriske feltet inne i mediet blir svakere enn det påtrykte feltet.

OPPGAVE 4

a) Sylinderens ladning på en lengde L blir:

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho dV \\ &= \int \rho_0 \frac{r}{R} \cdot L \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{2\pi L \rho_0}{R} \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{2\pi L \rho_0 R^2}{3} \end{aligned}$$

Total ladning pr lengdeenhet blir dermed:

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi \rho_0 R^2}{3}$$

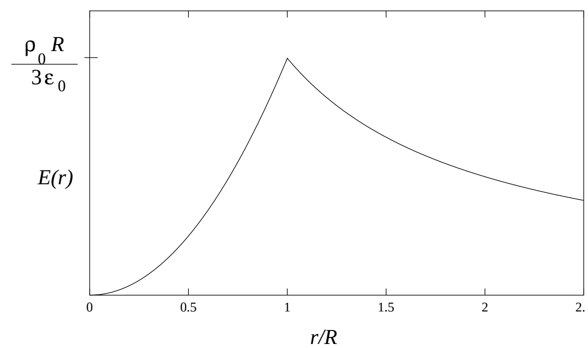
b) Symmetrien tilsier at det elektriske feltet overalt må være radielt rettet, og kun avhengig av avstanden r fra sylinderens akse. En fornuftig Gaussflate må derfor bli en sylinder med radius r og lengde L. Da står $\boldsymbol{E}$ vinkelrett på flatenormalen $\boldsymbol{dA}$ på Gaussflatens endeflater slik at disse ikke bidrar til integralet på venstre side i Gauss' lov. På resten av Gaussflaten har E konstant verdi, og $\boldsymbol{E}$ er parallell med $\boldsymbol{dA}$. Bidraget til integralet blir dermed $E(r) \cdot 2\pi r \cdot L$. Ladningen innenfor denne flaten, q_{in}, avhenger av om r er større eller mindre enn R:

$$q_{\text{in}} = \begin{cases} 2\pi L \rho_0 r^3/3R & \text{for } r < R \\ 2\pi L \rho_0 R^2/3 & \text{for } r > R \end{cases}$$

Dette gir for det elektriske feltet:

$$E(r) = \begin{cases} \rho_0 r^2/3\varepsilon_0 R & \text{for } r < R \\ \rho_0 R^2/3\varepsilon_0 r & \text{for } r > R \end{cases}$$

Skisse av $E(r)$:



OPPGAVE 5

a) Vi har oppgitt magnetfeltet fra en lang, tynn rett leder:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En bit av beltet med bredde dx i posisjon x vil derfor gi et bidrag

$$dB = \frac{\mu_0 i dx}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$$

til feltet $B(y)$. Retningen på $\boldsymbol{dB}$ blir som antydet i figuren i oppgaveteksten. Et tilsvarende bidrag får vi fra en bit av beltet i posisjon $-x$, nå med motsatt retning på y-komponenten, men samme retning på x-komponenten. For å finne det totale feltet $B(y)$, må vi derfor bestemme x-komponenten dB_x og integrere over beltets bredde, fra $x = -b/2$ til $x = b/2$. Fra figuren i oppgaveteksten har vi at $dB_x/dB = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Dermed:

$$\begin{aligned} B(y) &= \int dB_x \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 i dx}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\mu_0 i y}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dx}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\mu_0 i y}{2\pi} \frac{1}{y} \left(\arctan \frac{b}{2y} - \arctan\left(-\frac{b}{2y}\right)\right) \\ &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \arctan \frac{b}{2y} \end{aligned}$$

som skulle vises. Her har vi brukt det oppgitte integralet, og dessuten at $\arctan(-x) = -\arctan x$.

b) Dersom vi er veldig nær beltet, kan vi sette $\arctan b/2y \simeq \pi/2$. Da har vi

$$B(y) \simeq \frac{\mu_0 i}{2}$$

dvs uavhengig av avstanden y. Dette er nettopp hva vi utledet i forelesningene for magnetfeltet fra et uendelig stort strømførende plan. Og det er jo rimelig: Er vi veldig nær beltet, "ser" vi essensielt et uendelig stort plan.
Dersom vi er veldig langt unna beltet, kan vi sette $\arctan b/2y \simeq b/2y$. Da har vi

$$B(y) \simeq \frac{\mu_0 i b}{2\pi y}$$

dvs som for en tynn strømførende leder med strøm $I = ib$. Og det er jo også rimelig: Er vi veldig langt unna, ser vi essensielt en tynn leder.

OPPGAVE 6

a) For VR-krets gir Kirchhoffs spenningsregel $V = RI$. Dermed:

$$\begin{aligned} & V_0 \exp(i\omega t) = R I_0 \exp(i\omega t) \\ \Rightarrow\ & Z = \frac{V_0}{I_0} = R \\ \Rightarrow\ & Z \equiv |Z| \exp(i\alpha) \equiv \{|Z|, \alpha\} = \{R, 0\} \end{aligned}$$

For VC-krets:

$$
\begin{aligned}
& V_0 \exp(i\omega t) = \frac{Q}{C} \\
\Rightarrow\quad & I = \frac{dQ}{dt} = C V_0 i\omega \exp(i\omega t) \\
\Rightarrow\quad & I_0 = i\omega C V_0 \\
\Rightarrow\quad & Z = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C}\exp(-i\pi/2) = \{1/\omega C, -\pi/2\}
\end{aligned}
$$

For VL-krets:

$$
\begin{aligned}
& V_0 \exp(i\omega t) = L\frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 \exp(i\omega t) \\
\Rightarrow\quad & Z = i\omega L = \{\omega L, \pi/2\}
\end{aligned}
$$

b) For svært lave vinkelfrekvenser, dvs $\omega \ll 1/RC$, blir kondensatorens impedans $|Z_C| = 1/\omega C$ mye større enn motstandens impedans $|Z_R| = R$. Det betyr at strømmen fortrinnsvis vil passere motstanden R på sin vei gjennom parallellkoblingen av C og R. (Tenk på grensen $\omega \to 0$, dvs likespenning: Da tilsvarer kondensatoren en åpen krets, og gjennom en åpen krets går det ingen likestrøm.) Det betyr at kretsen essensielt består av to seriekoblede motstander, og Ohms lov gir direkte $I = V_0/(R+R) = 800/(4 \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^{-3} = 2$ mA.

For å bestemme I ved en vilkårlig vinkelfrekvens ω, regner vi først ut kretsens totale impedans. Ettersom vi her har en parallellkobling av C og R i serie med R, får vi:

$$
\begin{aligned}
Z &= R + (i\omega C + 1/R)^{-1} \\
&= R + \frac{R}{1 + i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{1 + i\omega RC + 1}{1 + i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{2 + i\omega RC}{1 + i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{(2 + i\omega RC)(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} \\
&= R \cdot \frac{2 + (\omega RC)^2 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \\
&\equiv |Z| e^{i\alpha}
\end{aligned}
$$

Dermed:

$$
\begin{aligned}
|Z| &= \frac{R}{1+(\omega RC)^2}\sqrt{(2+(\omega RC)^2)^2+(\omega RC)^2} \\
&= \frac{2R}{1+(\omega RC)^2}\sqrt{1+\frac{5}{4}(\omega RC)^2+\frac{1}{4}(\omega RC)^4} \\
\alpha &= \arctan\left(\frac{-\omega RC}{2+(\omega RC)^2}\right) = -\arctan\frac{\omega RC}{2+(\omega RC)^2}
\end{aligned}
$$

Faktoren ωRC (som er dimensjonsløs) er med de oppgitte verdier $1000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4.7 \cdot 10^{-9} = 0.94$, slik at $|Z| = 1.61R = 0.32\ \mathrm{M}\Omega$ og $\alpha = -18^\circ$. Strømamplituden blir $I_0 = V_0/|Z| \simeq 2.5$ mA.
Størst faseforskyvning mellom V og I har vi når argumentet til arctan-funksjonen har sin maksimale verdi. Den finner vi ved å sette den deriverte lik null ($x \equiv \omega RC$):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2+x^2}\right) &= \frac{1}{2+x^2} - \frac{2x^2}{(2+x^2)^2} \\
&= \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} \\
&= 0 \quad \text{for} \quad x = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Altså: Maksimal faseforskyvning når $\omega = \sqrt{2}/RC \simeq 1504\ \mathrm{s}^{-1}$.