NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4150 ELEKTROMAGNETISME
FY 1303 (MNFFY 103) ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Tirsdag 2. desember 2003 kl. 0900 - 1500

Eksamen bestod av 10 deloppgaver (1, 2, 3a, 3b, 3c, 4a, 4b, 5a, 5b, 6) som alle telte like mye under bedømmelsen.

OPPGAVE 1

Løsning: A – D – C – B – A

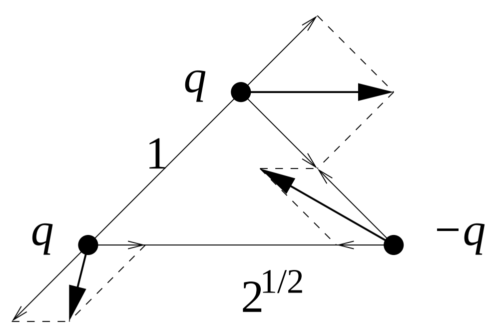
OPPGAVE 2

Løsning: D – A – C – A – C

Forklaring:

Oppgave 1:

i. A. Med en avstand en faktor $\sqrt{2}$ større mellom de to nederste ladningene enn mellom den øverste og hver av de to nederste, blir absoluttverdien av kreftene mellom de to nederste en faktor 1/2 mindre enn mellom den øverste og hver av de to nederste. Ladninger med likt fortegn frastøter hverandre, ladninger med motsatt fortegn tiltrekker hverandre. Da må de ulike kraftkomponentene bli som vist i følgende figur:



ii. D. Punkter i avstand r_+ fra ladningen q og avstand r_- fra ladningen $-q$ har potensial

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

På x-aksen er $r_+ = r_-$, og dermed $V = 0 =$ konstant.

iii. C. Dersom $\boldsymbol{E}$ skal være et konservativt felt, må vi ha

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

Feltet i alternativ C oppfyller denne betingelsen:

$$\nabla \times kx\,\hat{x} = \hat{y}\frac{\partial}{\partial z}(kx) - \hat{z}\frac{\partial}{\partial y}(kx) = 0 - 0 = 0$$

Alle de tre andre oppgitte funksjonene er ikke rotasjonsfrie.

iv. B. For det første må det elektriske feltet være lik null inne i metall-laget. Det innebærer konstant potensial V, hvilket utelukker graf 1. Videre må V være kontinuerlig, hvilket utelukker både 3 og 4. Graf 2 stemmer bra: Det elektriske feltet blir minst i dielektrikum med størst permittivitet, altså mellom 0 og a. Ettersom $E = -\nabla V = -dV/dx$, betyr det at helningen (i absoluttverdi) på funksjonen $V(x)$ må være mindre mellom 0 og a enn mellom $3a$ og $4a$.

v. A. Her er det vel overkommelig å regne ut det elektriske feltet på y-aksen eksplisitt. Enklere er det hvis en innser at vi må ha (av symmetrigrunner)

$$E(y=0) = 0$$

og (fordi langt unna ser dette ut som en punktladning $6Q$)

$$E(y \gg a, b) = \frac{6Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$$

Bare A og C stemmer med at $E(0) = 0$, mens bare A stemmer med den siste betingelsen. Funksjonen i C blir $3Qab/2\pi\varepsilon_0 y^4$ når y blir stor i forhold til a og b.

Oppgave 2:

i. D. Partikler med ladning q og hastighet $\boldsymbol{v}$ påvirkes av en kraft (Lorentzkraften)

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

når den kommer inn i området med elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ og magnetfelt $\boldsymbol{B}$. De partiklene som ikke avbøyes, påvirkes ikke av krefter, slik at

$$0 = q\left(E_0\hat{y} + vB_0\hat{x} \times \hat{z}\right) = q(E_0 - vB_0)\hat{y}$$

som gir

$$v = \frac{E_0}{B_0} = \frac{10 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 200 \text{ km/s}$$

ii. A. Her kan vi bruke at kraften på en rett strømførende leder (strøm I, lengde L, retning gitt ved $\boldsymbol{L}$) fra et uniformt magnetfelt $\boldsymbol{B}$ er

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

Lederbiten i 4. kvadrant (i xz-planet, med $x > 0$ og $z < 0$) kan beskrives ved

$$I\boldsymbol{L} = IL\,\hat{y}$$

slik at

$$\boldsymbol{F} = ILB(\hat{y} \times \hat{z}) = ILB\,\hat{x}$$

Lederbiten i 2. kvadrant ($x < 0$, $z > 0$) kan beskrives ved

$$I\boldsymbol{L} = -IL\,\hat{y}$$

slik at

$$\boldsymbol{F} = -ILB(\hat{y} \times \hat{z}) = -ILB\,\hat{x}$$

Altså er det kraftpar nr 1 som er riktig.

iii. C. Før vi skrur ut pære 3 har kretsen en total motstand lik

$$R_{\text{tot}} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{3}{2}R$$

Total strøm blir da

$$I_{\text{tot}} = \frac{V}{R_{\text{tot}}} = \frac{2V}{3R}$$

slik at strøm gjennom pære 2 blir

$$I_2 = \frac{1}{2}I_{\text{tot}} = \frac{V}{3R}$$

(Like stor strøm gjennom pære 2 og 3.)
Etter at pære 3 er skrudd ut, er total motstand i kretsen lik

$$R + R = 2R$$

og total strøm, som nå blir lik strømmen gjennom både pære 1 og 2, blir

$$\frac{V}{2R}$$

Strømmen gjennom pære 2 er altså større etter at pære 3 er skrudd ut. Dermed er utviklet effekt i pæra, $VI = RI^2$, også blitt større, og pære 2 lyser sterkere.

iv. A. Ifølge Gauss' lov for magnetfeltet skal vi alltid ha

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Med andre ord, magnetfeltet er divergensfritt.
Feltet i A er ikke divergensfritt:

$$\nabla \cdot kx\ \hat{x} = \frac{\partial}{\partial x} kx = k \neq 0$$

Alle de tre andre feltene oppfyller Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$.

v. C. Når ledersløyfa er på vei *inn* i magnetfeltet, øker den magnetiske fluksen ϕ_m omsluttet av sløyfa lineært med tiden t: $\phi_m(t) = kt$ (k = konst.). I dette tidsrommet blir indusert ems i sløyfa lik

$$V = -\frac{d\phi_m}{dt} = -k$$

Når ledersløyfa er på vei *gjennom* magnetfeltet (dvs etter at hele sløyfa er kommet inn i feltet og mens den er fullstendig inne i feltet), er $\phi_m = \phi_{\max}$ = konstant, og da blir

$$V = -\frac{d\phi_m}{dt} = 0$$

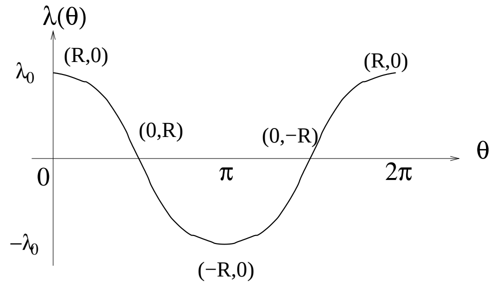
Når ledersløyfa er på vei *ut* av feltet, er $\phi_m(t) = \phi_{\max} - kt$, og indusert ems blir

$$V = -\frac{d\phi_m}{dt} = +k$$

Graf nr 3 stemmer med dette. Fortegnet på V fastlegges med Lenz' lov. På vei inn i feltet øker fluksen gjennom sløyfa inn i planet. For å motvirke dette, må det induseres en ems med retning mot klokka, slik at genererert strøm i sløyfa skaper et magnetfelt ut av planet. På vei ut av feltet blir det omvendt: Da minker fluksen inn i planet, og for å motvirke dette, induseres en ems med retning med klokka, slik at genererert strøm i sløyfa skaper et magnetfelt inn i planet, i et forsøk på å motvirke denne reduksjonen. Positiv V i graf 3 tilsvarer altså "mot klokka".

OPPGAVE 3

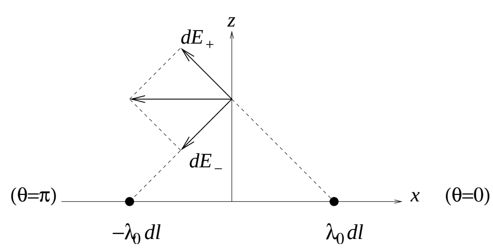
a) Ladningstettheten $\lambda(\theta)$ varierer rundt ringen som vist i følgende figur:



Det er vel opplagt fra figuren at ringen er like mye negativt ladet i venstre halvplan ($x < 0$) som den er positivt ladet i høyre halvplan, slik at total ladning på ringen må bli $\underline{Q = 0}$.
Dette får vi selvsagt også ved å bestemme Q eksplisitt:

$$Q = \oint \lambda \, dl = \oint \lambda(\theta) R \, d\theta = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

Deretter skal vi argumentere for at $\boldsymbol{E}(0,0,z) = -E_x(z)\,\hat{x}$, dvs at det elektriske feltet fra ringen på z-aksen peker i negativ x-retning.
La oss først se på xz-planet:



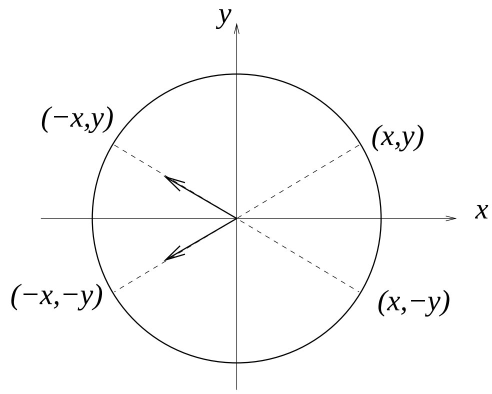
Vi ser at summen av bidragene til feltet fra de to ladningselementene

$$dq(0) = \lambda_0 \, dl$$

på positiv x-akse og

$$dq(\pi) = -\lambda_0 \, dl$$

på negativ x-akse blir en vektor i negativ x-retning.
Videre kan vi se på bidraget fra 4 ladningselementer i posisjoner (x, y), $(x, -y)$, $(-x, y)$ og $(-x, -y)$:



I venstre halvplan er ladningen negativ. Feltbidragene på z-aksen fra elementene i $(-x, y)$ og $(-x, -y)$ blir derfor vektorer med retning *inn mot* ladningselementene. I høyre halvplan er ladningen positiv. Da blir feltbidragene på z-aksen fra elementene i (x, y) og $(x, -y)$ vektorer med retning *bort fra* ladningselementene. I figuren vises bare projeksjonen i xy-planet, som blir like stor for diagonalt motsatte elementer. Med andre ord, z-komponenten av feltet må forsvinne. Videre ser vi at de to elementene i (x, y) og $(-x, -y)$ gir y-komponenter som er like store men motsatt rettet de tilsvarende fra elementene i $(x, -y)$ og $(-x, y)$. Altså må også y-komponenten forsvinne.
Samtlige ladningselementer bidrar med negativ x-komponent, så alt i alt blir feltet på z-aksen rettet langs $-\hat{x}$.
(Under forutsetning av at konstanten λ_0 er positiv. Med negativ λ_0 skifter selvsagt alle feltvektorer retning, slik at det totale feltet peker i positiv x-retning.)

b) Avstanden fra z-aksen til alle punktene på ringen er like stor:

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

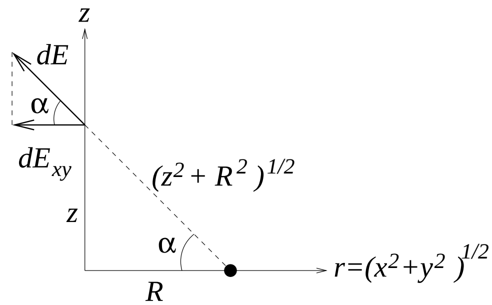
Absoluttverdien av bidraget til det elektriske feltet fra en "buebit" $dl = R\, d\theta$ avhenger av vinkelen θ (som opplyst i oppgaveteksten):

$$dE(\theta) = dE = \frac{|\lambda(\theta)|\, dl}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2 + R^2)} = \frac{\lambda_0 |\cos\theta| R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2 + R^2)}$$

Ettersom $\cos\theta$ er negativ for $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, har vi satt på absoluttverditegn for å få absoluttverdien av $d\boldsymbol{E}$. I punkt a) overbeviste vi oss om at alle elementer av ringen bidrar med *negativ* x-komponent til feltet, dvs med *samme* fortegn. Vi må derfor bare passe på at den størrelsen som til slutt skal integreres opp ikke skifter fortegn når θ går mellom 0 og 2π.

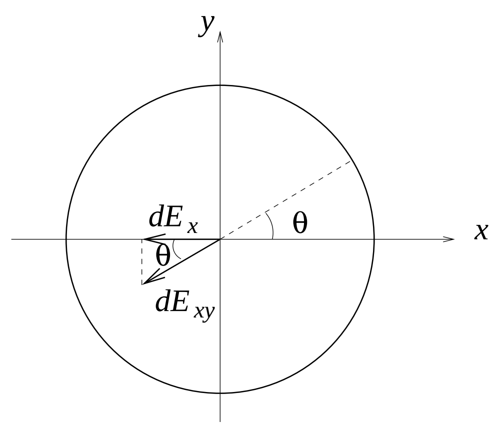
Projeksjonen av dE ned i xy-planet (dvs komponenten av $d\boldsymbol{E}$ i xy-planet) blir:

$$(dE)_{xy} = dE\cos\alpha = dE\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$$



Dernest trenger vi projeksjonen av $(dE)_{xy}$ ned på x-aksen (som altså blir (den negative) x-komponenten av $d\boldsymbol{E}$):

$$dE_x = (dE)_{xy}|\cos\theta|$$



Da har vi fått et uttrykk for dE_x som er en funksjon av vinkelen θ:

$$\begin{aligned} dE_x &= (dE)_{xy}|\cos\theta| \\ &= dE\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}|\cos\theta| \\ &= \frac{\lambda_0|\cos\theta|R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2+R^2)}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}|\cos\theta| \\ &= \frac{\lambda_0R^2}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2+R^2)^{3/2}}\cos^2\theta\;d\theta \end{aligned}$$

Her kunne vi trygt sløyfe absoluttverditegn fordi $\cos^2\theta$ alltid er positiv.
Total x-komponent av feltet på z-aksen, og dermed totalt felt på z-aksen blir:

$$\begin{aligned}
E_x(z) &= \int dE_x = \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \\
&= \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\cdot\pi \\
&= \underline{\frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}}
\end{aligned}$$

c) Hvis $z \gg R$, kan vi sette $z^2+R^2 \simeq z^2$. Det elektriske feltet blir da tilnærmet lik

$$E_x(z) \simeq \frac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0 z^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 z^3}$$

der vi har satt inn det oppgitte uttrykket for ringens dipolmoment, $p = \pi\lambda_0 R^2$.
Feltet faller altså av som en over avstanden opphøyd i tredje ($\underline{n=3}$), et resultat som vi har vært borte i både på regneøving og på forelesning. Hadde ringen hatt en netto ladning forskjellig fra null, måtte vi i stor avstand ha fått et felt proporsjonalt med $1/z^2$, ettersom det da essensielt hadde sett ut som en punktladning. Feltet fra en dipol, med null netto ladning, må opplagt falle av *raskere* enn feltet fra en punktladning, ettersom vektorbidraget fra den negative og den positive halvdelen av dipolen delvis kansellerer hverandre: Den negative halvdelen bidrar med et felt rettet *inn mot* ringen, den positive halvdelen bidrar med et felt rettet *bort fra* ringen.
Dermed, og uten detaljert kjennskap til $E_x(z)$, må en kunne konkludere med at $n > 2$.
En annen sak er at ren *dimensjonsanalyse* av det oppgitte uttrykket for $E_x(z)$ gir direkte hva n må være: Elektrisk dipolmoment p har, fra sin definisjon, enheten Cm (ladning $\times$ lengde). Elektrisk felt skal være på formen "ladning/ε_0 $\times$ lengde^2". Følgelig må $n = 3$.

OPPGAVE 4

a) Spenningskilden sørger her for at vi har samme potensialforskjell V_0 over alle de tre parallelle "grenene" i kretsen. Dermed har vi direkte

$$I_1 = \underline{\frac{V_0}{R}}$$

fra Ohms lov.
Total motstand i grenen til høyre blir

$$R_3 = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{3}{2}R$$

(dvs R koblet i serie med en parallellkobling av R og R). Strømmen i denne grenen er derfor

$$I_3 = \frac{V_0}{R_3} = \underline{\frac{2V_0}{3R}}$$

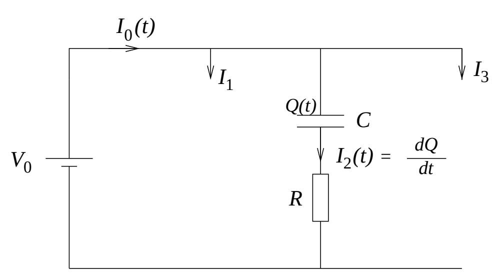
Så til I_2, som kanskje voldte mest hodebry, men som egentlig er den enkleste: Null likestrøm gjennom en kondensator,

$$I_2 = \underline{0}$$

Dermed har vi heller ikke noe spenningsfall over motstanden R i den midterste grenen, slik at hele den påtrykte spenningen V_0 må tilsvare spenningsfallet over kapasitansen. Fra definisjonen av kapasitans følger da

$$Q = \underline{CV_0}$$

b) Etter tilkobling av spenningskilden ved $t = 0$ blir strømmene i gren 1 og 3 umiddelbart lik henholdsvis I_1 og I_3 som bestemt i punkt *a*). Grenen i midten vil imidlertid få en tidsavhengig strøm $I_2(t)$. Vi har nøyaktig samme situasjon som vi studerte i forelesningene, nemlig opplading av kondensator i en enkel RC-krets ved tilkobling av konstant spenningskilde V_0 ved $t = 0$:



Den eneste forskjellen fra det vi gjorde i forelesningene er at vi har to ekstra grener der det går konstante strømmer I_1 og I_3. Det betyr at spenningskilden må levere en strøm $I_0(t)$ som ikke er lik den som går i midterste gren, men derimot

$$I_0(t) = I_1 + I_2(t) + I_3$$

Dette har ingen betydning for RC-grenen. Spenningskilden leverer så mye strøm som hele kretsen "forlanger". Den er med andre ord ikke en leverandør av konstant strøm, men derimot *konstant spenning.*
Påtrykt spenning V_0 over gren 2 må være lik summen av spenningsfallene over kapasitansen, $V_C = Q/C$, og motstanden, $V_R = RI_2 = RdQ/dt$:

$$V_0 = \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt}$$

(Alternativt: Summen av alle spenningsfall rundt den lukkede sløyfa må være lik null, $-V_0 + Q/C + RdQ/dt = 0$.) Denne 1. ordens inhomogene differensialligningen har vi løst i forelesningene. Med initialbetingelsen (gitt i oppgaveteksten) $Q(0) = 0$ er løsningen

$$Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

som gir strømmen

$$I_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$

Dermed ser vi at strømmen umiddelbart etter tilkobling av V_0 blir

$$I_2(0) = \frac{V_0}{R}$$

og etter lang tid ($t \to \infty$)

$$I_2(\infty) = 0$$

Da kan vi regne ut total strøm levert av spenningskilden umiddelbart etter tilkobling,

$$I_0(0) = I_1 + I_2(0) + I_3 = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{R} + \frac{2V_0}{3R} = \frac{8V_0}{3R}$$

og etter lang tid,

$$I_0(\infty) = I_1 + I_2(\infty) + I_3 = \frac{V_0}{R} + 0 + \frac{2V_0}{3R} = \frac{5V_0}{3R}$$

Forholdet som skulle bestemmes blir følgelig

$$\frac{I_0(\infty)}{I_0(0)} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

Kommentar 1: I ettertenksomhetens klare lys innser vi kanskje at det egentlig ikke var nødvendig med all denne regningen for å fastlegge $I_2(0)$ og $I_2(\infty)$. For det første: $I_2(\infty) = 0$ har vi allerede i punkt a) (null likestrøm gjennom kondensator). For det andre: Det er gitt i oppgaveteksten at startladningen på kondensatoren er $Q(0) = 0$. Umiddelbart etter tilkobling av V_0 må derfor hele spenningsfallet over RC-grenen falle over motstanden R, med den følge at $I_2(0) = V_0/R$. (Vi må ha *kontinuerlig* ladning Q: Hvis Q gjorde et sprang fra 0 til en endelig verdi i $t = 0$ ville det bety uendelig strøm $I_2 = dQ/dt$ i $t = 0$, hvilket åpenbart er umulig.) Problem solved!

Kommentar 2: Hvis vi nå først *skal* regne, kommer vi ikke utenom å finne løsningen på differensialligningen for $Q(t)$. Her kan en gå fram på (minst) et par ulike måter. I forelesningene skrev vi om ligningen til formen

$$\frac{dQ}{Q - CV_0} = -\frac{1}{RC}dt$$

som ved integrasjon på begge sider gav

$$\ln(Q - CV_0) = -\frac{t}{RC} + \ln k$$

der $\ln k$ er en integrasjonskonstant som må fastlegges ved hjelp av initialbetingelsen $Q(0) = 0$. Eksponering (eller hva det nå heter) på begge sider og addisjon av CV_0 på begge sider gir så

$$Q = CV_0 + ke^{-t/RC}$$

Bruk av startbetingelsen gir

$$Q(0) = 0 = CV_0 + k \cdot 1$$

dvs $k = -CV_0$. Den tidsavhengige ladningen på kondensatoren er følgelig

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

En alternativ framgangsmåte, som kanskje ligner mer på "oppskriften" fra matematikkundervisningen, er som følger:

Løsningen av ligningen

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V_0}{R}$$

kan skrives på formen

$$Q = Q_h + Q_p$$

der Q_h er løsning av den homogene ligningen

$$\frac{dQ_h}{dt} + \frac{1}{RC}Q_h = 0$$

og Q_p er en såkalt partikulærløsning som må være proporsjonal med det "inhomogene" leddet på høyre side:

$$Q_p = \kappa\frac{V_0}{R}$$

Innsetting fastlegger konstanten κ:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_h}{dt} + \frac{dQ_p}{dt} + \frac{1}{RC}Q_h + \frac{1}{RC}Q_p &= \frac{V_0}{R} \\
\Rightarrow \frac{1}{RC}Q_p &= \frac{V_0}{R} \\
\Rightarrow \frac{1}{RC}\kappa\frac{V_0}{R} &= \frac{V_0}{R} \\
\Rightarrow \kappa &= RC \\
\Rightarrow Q_p &= CV_0
\end{aligned}$$

Videre vet (?) vi at den homogene løsningen må være en eksponentialfunksjon, dvs

$$Q_h = \alpha e^{\beta t}$$

som ved innsetting gir

$$\alpha\beta e^{\beta t} + \frac{1}{RC}\alpha e^{\beta t} = 0$$

dvs $\beta = -1/RC$. Endelig fastlegges α fra startbetingelsen $Q(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
Q(0) = Q_h(0) + Q_p(0) = \alpha + CV_0 &= 0 \\
\Rightarrow \alpha &= -CV_0
\end{aligned}$$

som gir

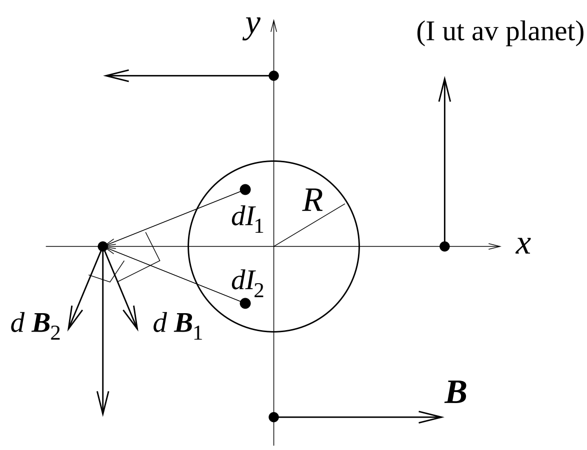
$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

OPPGAVE 5

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\boldsymbol{j}$ over tverrsnittet av lederen:

$$\begin{aligned} I &= \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A} = \int j \cdot dA \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} j(r) r \; dr \; d\theta \\ &= 2\pi j_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R} \right) dr = 2\pi j_0 \Big|_0^R \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right) \\ &= 2\pi j_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) \\ &= \underline{\frac{\pi}{3} j_0 R^2} \end{aligned}$$

Retningen på magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\boldsymbol{j}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse (senterakse). Med andre ord, feltlinjene for $\boldsymbol{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. I figuren nedenfor er $\boldsymbol{B}$ tegnet inn i de fire punktene på henholdsvis positiv og negativ x-akse og y-akse:



I figuren er det også vist hvordan to symmetrisk beliggende "strømelementer" dI_1 og dI_2 tilsammen gir et magnetfelt $d\boldsymbol{B}_1 + d\boldsymbol{B}_2$ på den mellomliggende symmetriaksen (her: x-aksen) med nevnte tangentielle retning. Følgelig må det totale feltet også ha en slik retning. Dette symmetriargumentet vil gjelde like bra både inne i og utenfor lederen, slik at dette blir retningen på $\boldsymbol{B}$ *overalt.*

(Her var det *ikke* påkrevd med en slik symmetriargumentasjon. Fire tangentielle vektorer i figuren er alt som skal til for å besvare oppgaven.)

b) Med tangentiell $\boldsymbol{B}$ overalt, og $B = |\boldsymbol{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senter-akse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\begin{aligned} \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} &= \mu_0 I_{\text{in}} \\ \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi r &= \mu_0 I(r) \end{aligned}$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs: som er omsluttet av) sirkelen med radius r:

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^r j(r')r'\,dr' \cdot 2\pi \\ &= 2\pi j_0 \int_0^r \left(r' - \frac{(r')^2}{R}\right) dr' = 2\pi j_0 \Big|_0^r \left(\frac{(r')^2}{2} - \frac{(r')^3}{3R}\right) \\ &= \underline{\pi j_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R}\right)} \end{aligned}$$

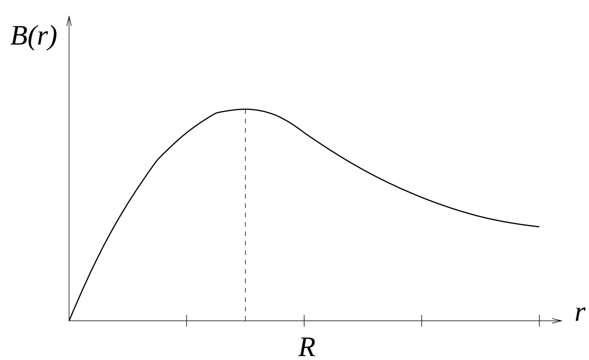
Dette må gjelde for $r \leq R$. Har vi en sirkel med radius $r > R$, vil *hele* strømmen i lederen,

$$I(r > R) = \frac{\pi}{3} j_0 R^2,$$

være omsluttet av den sirkulære amperekurven.
Magnetfeltet blir altså

$$\underline{B(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 j_0 r\,(1 - 2r/3R) & r \leq R \\ \mu_0 j_0 R^2/6r & r > R \end{cases}}$$

Skisse:



Maksimal verdi for B har vi der den deriverte, dB/dr, forsvinner:

$$\frac{d}{dr}\left(r - \frac{2r^2}{3R}\right) = 1 - \frac{4r}{3R} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \underline{\frac{3R}{4}}$$

OPPGAVE 6

Magnetfeltet $B(r,t)$ fra den rette strømførende lederen resulterer i en magnetisk fluks $\phi_m(t)$ innenfor den rektangulære ledersløyfa. $\boldsymbol{B}$ i xz-planet (for positive x, dvs der strømsløyfa er plassert) har retning langs positiv y-akse, dvs inn i planet. Flatenormalen til strømsløyfa er også en vektor i y-retning, slik at det blir enkelt å bestemme den magnetiske fluksen:

$$\begin{aligned}
\phi_m(t) &= \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int B \cdot dA \\
&= \int_{x=2R}^{2R+2a} C\,\frac{I(t)}{x}\,a\,dx \\
&= CI(t)a\left[\ln(2R+2a) - \ln 2R\right] \\
&= CI(t)a \ln\frac{R+a}{R}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt $dA = a\ dx$, dvs flateelementer med høyde a og bredde dx (ettersom B ikke avhenger av z). Dessuten har vi brukt at i xz-planet er $x = r =$ avstanden fra lederens senterakse. Indusert elektromotorisk spenning i ledersløyfa blir

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_m}{dt} = -Ca \ln\frac{R+a}{R}\,\frac{dI}{dt}$$

Med den oppgitte $I(t)$ har vi

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin\omega t$$

slik at

$$\mathcal{E}(t) = Ca\ln\frac{R+a}{R}\omega I_0 \sin\omega t = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$$

Med oppgitte tallverdier blir *amplituden* $\mathcal{E}_0$ lik

$$\mathcal{E}_0 = 2\cdot 10^{-7}\cdot 0.09\cdot \ln\frac{0.01+0.09}{0.01}\cdot 10^4\cdot 20 = 8.3\cdot 10^{-3}$$

Her er alle involverte størrelser i SI-enheter, så $\mathcal{E}_0$ må nødvendigvis komme ut i enheten volt. Altså:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin\omega t = \underline{8.3\ \mathrm{mV}\ \sin\omega t}$$