NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4150/TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Fredag 6. august 2004 kl. 0900 - 1400

Eksamen bestod av 5 oppgaver. Vektlegging av hver oppgave er angitt.

Dette dokumentet er på 7 sider.

OPPGAVE 1 (a og b teller hhv 10 og 15%)

a) I elektrostatisk likevekt må vi ha $\boldsymbol{E} = 0$ inne i en elektrisk leder. Hvis ikke ville det virke krefter $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ på mobile ladninger (elektroner), og vi ville få en elektrisk strøm. En eventuell netto ladning vil plassere seg på overflaten av en elektrisk leder i elektrostatisk likevekt.
(Legg en gaussflate i sin helhet inne i lederens volum. Med $\boldsymbol{E} = 0$ overalt på denne flaten gir Gauss' lov $q = \varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$, dvs null netto ladning innenfor gaussflaten. Ettersom vi kan legge denne gaussflaten så nær inntil lederens overflate som vi vil, blir konklusjonen at hele nettoladningen må ligge på lederens overflate. Her var det ikke nødvendig å begrunne at ladningen ligger på overflaten.)

b) Den kulesymmetriske fordelingen av positive ioner genererer et elektrisk felt rettet radielt utover. Kula er dielektrisk, dvs den består av elektriske dipoler som rettes inn langs feltet fra de positive ionene. Dette resulterer i en polarisering $\boldsymbol{P}$ rettet radielt utover som bidrar til det totale elektriske feltet inne i kula: Den elektriske feltstyrken svekkes inne i kula på grunn av polariseringen.
Vi må derfor starte med Gauss' lov for den elektriske forskyvningen D. Med oppgitt tetthet av fri ladning inne i kula, $\rho(r)$, blir netto fri ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r < R$ lik

$$Q(r < R) = \int_{r'<r} dQ = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{R} \cdot 4\pi (r')^2 dr' = \rho_0 \cdot 4\pi \cdot \frac{r^4}{4R} = \frac{\rho_0 \pi r^4}{R}$$

Netto fri ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ blir

$$Q(r > R) = \int_0^R \rho_0 \frac{r'}{R} \cdot 4\pi (r')^2 dr' = \rho_0 \pi R^3$$

dvs total fri ladning i kula. Gauss' lov for D gir nå

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q(r)$$

dvs

$$D(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r^2}$$

Sammenhengen mellom elektrisk felt E og elektrisk forskyvning D er

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

der $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ er permittiviteten til det aktuelle stoffet. Her har vi $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ inne i kula, dvs for $r < R$ og $\varepsilon = \varepsilon_0$ utenfor kula, dvs for $r > R$. Alt i alt gir dette en elektrisk feltstyrke

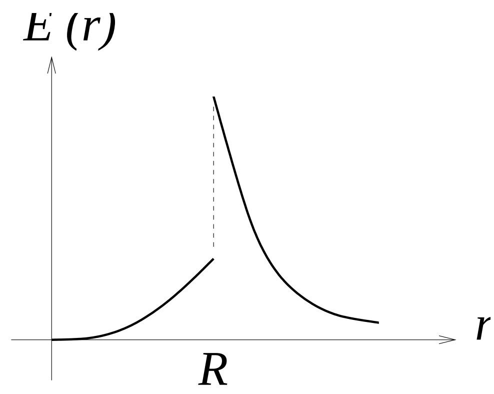
$$E(r < R) = \frac{\rho_0 r^2}{12\varepsilon_0 R}$$

inne i kula og

$$E(r > R) = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$

utenfor kula.

Skisse av feltstyrken:



OPPGAVE 2 (a og b teller 5% hver, c teller 10%)

a) Fra Biot-Savarts lov har vi $d\boldsymbol{B} \sim I\ d\boldsymbol{l} \times \hat{r}$, dvs at magnetfeltet rundt en rett strømførende leder må være rettet tangentielt til en sirkel konsentrisk med lederen. Av symmetrigrunner må styrken på magnetfeltet være konstant rundt det hele på en slik sirkel med gitt radius s. Dermed er det naturlig å velge nettopp en slik sirkel som amperekurve, for da reduserer venstre side av Amperes lov seg til

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = B(s) \cdot 2\pi s$$

Dette uttrykket skal ifølge Amperes lov være lik konstanten μ_0 multiplisert med netto strøm som omsluttes av amperekurven, dvs I. Dermed:

$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

som skulle vises.

b) Magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ til ei (plan) lukket strømsløyfe er pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

der $\boldsymbol{A}$ er det såkalte "vektorarealet" til sløyfa, med retning normalt på sløyfa (og fortegnet bestemt ved høyrehåndsregelen) og størrelse lik omsluttet areal. Her blir derfor $\boldsymbol{A} = -a^2\hat{z}$, rettet inn i planet, og

$$\boldsymbol{m} = -Ia^2\hat{z}$$

c) Total kraft på den kvadratiske sløyfa er lik (vektor-)summen av kreftene på hver av de fire rette sidene. Utgangspunktet er uttrykket for magnetisk kraft på strømførende leder,

$$\boldsymbol{F} = I \int d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

I figuren nedenfor er de fire delkreftene tegnet inn (pilene inne i den kvadratiske sløyfa). Av symmetrigrunner må kraften på den venstre siden bli like stor som kraften på den høyre siden, men motsatt rettet. Altså kansellerer disse, og vi trenger ikke å regne dem ut. Over hele den nederste biten er $B = \mu_0 I/2\pi s$ slik at kraften på denne blir

$$I \cdot a \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

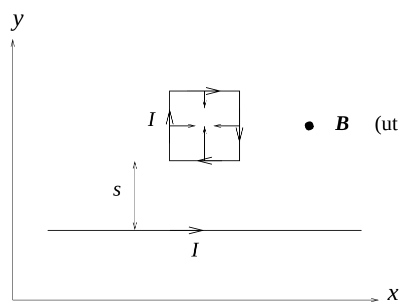
rettet oppover. Tilsvarende er $B = \mu_0 I/2\pi(s+a)$ konstant over hele den øverste biten slik at kraften på denne blir

$$I \cdot a \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)}$$

rettet nedover. Total kraft på den kvadratiske sløyfa blir dermed

$$\boldsymbol{F} = \hat{y}\,\frac{\mu_0 a I^2}{2\pi}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) = \hat{y}\,\frac{\mu_0 a^2 I^2}{2\pi s(s+a)}$$

rettet oppover.



OPPGAVE 3 (Teller 15%)

Total motstand til flere seriekoblede motstander R_j er bestemt ved

$$R = \sum_j R_j$$

mens total motstand til flere parallellkoblede motstander er bestemt ved

$$R = \left(\sum_j \frac{1}{R_j}\right)^{-1}$$

Her blir derfor total motstand for kombinasjonen (i) lik

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_3^{(i)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3^{(i)}$$

mens for kombinasjonen (ii) blir total motstand

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3^{(ii)}}\right)^{-1} = \frac{(R_1 + R_2)R_3^{(ii)}}{R_1 + R_2 + R_3^{(ii)}}$$

Begge disse uttrykkene skal altså være lik R_1, som gir

$$R_3^{(i)} = R_1 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}$$

for kombinasjonen (i) og

$$R_3^{(ii)} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2}$$

for kombinasjonen (ii). Med tallverdier $R_1 = 1\ \Omega$ og $R_2 = 4\ \Omega$:

$$R_3^{(i)} = \frac{1}{1+4} = 0.2\ \Omega$$

$$R_3^{(ii)} = \frac{1 \cdot (1+4)}{4} = 1.25\ \Omega$$

I begge tilfeller er total motstand $1\ \Omega$ slik at total strøm blir $6\ \mathrm{V}/1\ \Omega = 6\ \mathrm{A}$. I (i) går all strøm gjennom $R_3^{(i)}$, altså 6 A. I (ii) er spenningsfallet over $R_3^{(ii)}$ lik 6 V, slik at strømmen gjennom $R_3^{(ii)}$ må bli $6\ \mathrm{V}/1.25\ \Omega = 4.8\ \mathrm{A}$.

OPPGAVE 4 (Teller 15%)

Før skuddet avfyres er kondensatoren kortsluttet (gjennom A) og har dermed heller ingen ladning på eller potensialforskjell mellom platene. Voltmeteret viser i utgangspunktet altså null spenning. Når kula bryter kretsen i A (ved $t = 0$), har vi en seriekobling av R og C tilkoblet spenningskilden V_0, og kondensatoren lades opp:

$$Q(t) = V_0 C \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Denne løsningen får vi ved å benytte Kirchhoffs spenningsregel,

$$V_0 = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

og initialbetingelsen $Q(0) = 0$, se forelesningene. Spenningen på voltmeteret får samme tidsavhengighet,

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Parameteren τ er altså lik $RC = 130 \cdot 6.2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} \simeq 8.1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}$. Når kula bryter kretsen i B, stopper ladningstilførselen inn på kondensatoren. Tidspunktet t_B for bruddet ved B er gitt ved

$$V = 1.0\ \mathrm{V} = 6.0\ \mathrm{V} \cdot \left(1 - e^{-t_B/RC}\right)$$

som gir

$$t_B = RC \ln\frac{6}{5} = 130 \cdot 6.2 \cdot 10^{-6} \cdot \ln 1.2 = 1.47 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

På denne tida tilbakelegger kula en avstand $d = 25$ cm, så dens hastighet er

$$v = d/t_B = 0.25/(1.47 \cdot 10^{-4}) = 1701\ \mathrm{m/s} \simeq 1.7\ \mathrm{km/s}$$

OPPGAVE 5 (a teller 5%, b og c teller 10% hver)

a) Gjensidig induktans mellom de to lederne er $M_{21} = \phi_2/I_1$, der ϕ_2 er magnetisk fluks omsluttet av leder (2) generert av strømmen I_1 i leder (1). Fra oppgave 2a har vi styrken på magnetfeltet fra en lang rett strømførende leder. Høyrehåndsregelen gir oss at magnetfeltet peker ut av planet der den kvadratiske sløyfa ligger, så vi får

$$\phi_2 = \int_{(2)} B \cdot dA = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \cdot dy \cdot a = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}(\ln 2a - \ln a) = \frac{\mu_0 I_1 a \ln 2}{2\pi}$$

Gjensidig induktans blir dermed

$$M_{21} = \phi_2/I_1 = \frac{\mu_0 a \ln 2}{2\pi}$$

b) Vi har oppgitt sløyfas resistans R og skal bestemme indusert strøm i sløyfa. Da må vi ta utgangspunkt i indusert spenning $V_2(t)$ i sløyfa, som er gitt ved Faradays induksjonslov:

$$V_2(t) = -\frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

Fortegnet på den induserte spenningen, og dermed retningen på den induserte strømmen I_2, fastlegges ved hjelp av Lenz' lov: Systemet forsøker å motsette seg den ytre forårsakede endring i magnetisk fluks. Når strømmen I_1 i den rette lederen reduseres, reduseres den magnetiske fluksen omsluttet av sløyfa ut av planet. Dette søkes motvirket ved at det genereres en strøm I_2 i sløyfa som går *mot* klokka. Fluksbidraget fra I_2 vil da peke ut av planet.
Den induserte strømmen blir

$$I_2 = V_2/R = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{M_{21}}{R}\frac{dI_1}{dt} = \frac{M_{21}}{R}\alpha I_0 e^{-\alpha t}$$

slik at

$$I_s = \frac{M_{21}}{R}\alpha I_0 \quad \left(= \frac{\mu_0 a \alpha I_0 \ln 2}{2\pi R} \right)$$

c) Indusert (mot-)spenning i induktansen er $L dI/dt$. Før $t = 0$ er selvsagt $I = 0$ ettersom $V = 0$. Dersom $I(t)$ var diskontinuerlig i $t = 0$, ville det tilsvare en uendelig stor indusert spenning i induktansen, hvilket ikke er mulig. Følgelig må vi ha $I(t \to 0^+) = 0$.
Kirchhoffs spenningsregel for denne kretsen gir

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

Her er $V(t)$ kjent, og formen på $I(t)$ er oppgitt, så det er bare å sette inn:

$$V_0 e^{-\alpha t} = RI_\alpha e^{-\alpha t} + RI_\beta e^{-\beta t} - \alpha L I_\alpha e^{-\alpha t} - \beta L I_\beta e^{-\beta t}$$

Denne ligningen må gjelde for alle $t > 0$, så med $\alpha \neq \beta$ får vi

$$V_0 = I_\alpha (R - \alpha L)$$

$$0 = RI_\beta - \beta L I_\beta$$

Den første av disse gir

$$I_\alpha = \frac{V_0}{R - \alpha L}$$

og den andre gir

$$\beta = \frac{R}{L}$$

Endelig kan vi benytte initialbetingelsen $I(0) = 0$ til å fastlegge I_β:

$$I(0) = 0 = I_\alpha + I_\beta$$

dvs

$$I_\beta = -I_\alpha = -\frac{V_0}{R - \alpha L}$$

Hele uttrykket for den tidsavhengige strømmen blir

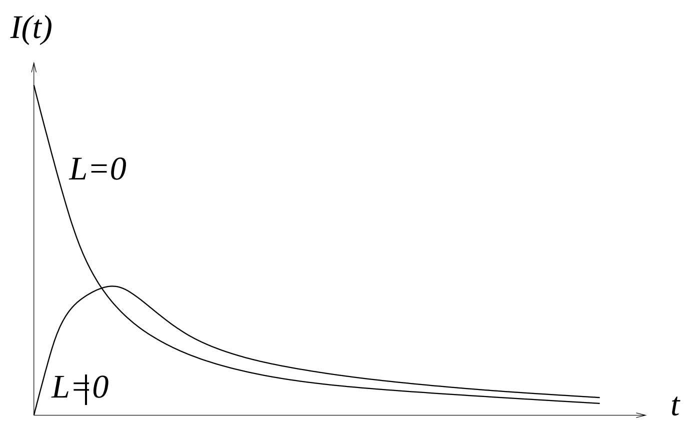
$$I(t) = \frac{V_0}{R - \alpha L} \left(e^{-\alpha t} - e^{-Rt/L} \right)$$

Kommentar: Vi ser at dette reduserer seg til resultatet funnet i b dersom vi setter $L = 0$:

$$I(t; L \to 0) = \frac{V_0}{R} e^{-\alpha t}$$

Størrelsen V_0 tilsvarer altså $\mu_0 a I_0 \ln 2 / 2\pi$ i punkt b.

Skisse av $I(t)$ med $L = 0$ og $L \neq 0$ (ikke påkrevd):



Legg merke til at selvinduksjon i sløyfa for det første motvirker en brå endring i I etter at V er skrudd på, og for det andre motvirkes reduksjonen i I etterhvert som V reduseres. Med andre ord: Den induserte motspenningen LdI/dt er først negativ men skifter etterhvert fortegn. Du kan jo forsøke å vise at dette skjer ved tidspunktet

$$t_0 = \frac{L}{R - \alpha L} \ln \frac{R}{\alpha L}$$