NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Torsdag 13. mai 2004 kl. 0900 - 1400

Eksamen bestod av 5 oppgaver. Vektlegging av hver oppgave er angitt.

OPPGAVE 1 (Teller 20%)

Kule 1:
Inni kula har vi $E_1(r) = 0$. Ladningen Q fordeler seg jevnt på kulas overflate. Vi velger en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ konsentrisk med metallkula. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være konstant i absoluttverdi på hele gaussflaten, og dessuten radielt rettet utover, dvs parallelt med flatenormalen $d\boldsymbol{A}$. Gauss' lov for $\boldsymbol{E}$ gir da:

$$E_1(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

dvs

$$E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Maksimal verdi på $E_1(r)$ på kulas overflate, dvs $r_1 = R$. Tilhørende feltverdi:

$$E_1(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Kule 2:
Viser at ρ_{20} er som gitt i oppgaven:

$$Q = \int_{r<R} \rho_2(r)\, dV$$

Med kulesymmetrisk ladningstetthet kan vi velge kuleskall med indre radius r og tykkelse dr som volumelement:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Dermed:

$$Q = 4\pi\rho_{20} \int_0^R r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = 4\pi\rho_{20}|_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) = \frac{\pi}{3}\rho_{20}R^3$$

dvs

$$\rho_{20} = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

som skulle vises.
Feltet $E_2(r)$ inni kula bestemmes ved å velge kuleformet gaussflate med radius $r < R$. Da må vi bestemme netto ladning innenfor denne gaussflaten. Vi bruker samme metode som ved utregning av den totale ladningen Q (se over), men vi integrerer bare ut til radius r:

$$q_2(r) = 4\pi\rho_{20} \int_0^r r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = 4\pi\rho_{20} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

Gauss' lov gir da:

$$E_2(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_2(r)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho_{20}}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

dvs

$$E_2(r) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^3} \left(r - \frac{3r^2}{4R}\right)$$

hvor vi brukte sammenhengen mellom Q og ρ_{20}.

Feltet $E_2(r)$ utenfor kula bestemmes ved å velge kuleformet gaussflate med radius $r > R$. Da er netto ladning innenfor gaussflaten lik Q, slik at

$$E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

for $r > R$.
Feltet inni kula har sin maksimale verdi der $dE_2/dr = 0$:

$$\frac{dE_2}{dr} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1 - \frac{3r}{2R}\right) = 0$$

dvs

$$r_2 = \frac{2R}{3}$$

Verdien av feltet i denne avstanden fra sentrum er

$$E_2(r_2) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{2R}{3} - \frac{R}{3}\right) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Kule 3:
Bestemmer først ρ_{30}:

$$Q = \int_{r<R} \rho_3(r)\, dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{30}$$

(dvs rett og slett kulas volum multiplisert med ladningstettheten, ettersom den her er konstant).
Dermed:

$$\rho_{30} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Her har vi ei dielektrisk kule, med permittivitet $2\varepsilon_0$. Det betyr at elektriske dipoler rettes inn langs feltet som skapes av den "frie" ladningen Q, dvs kula polariseres med $\boldsymbol{P}$ rettet utover. Inni kula kan vi da bruke Gauss' lov for den elektriske forskyvningen D. Med uniform tetthet av fri ladning inne i kula, ρ_{30}, blir netto fri ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r < R$ lik

$$q_{\text{fri}}(r) = \rho_{30} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dermed:

$$D_3(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho_{30} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

dvs

$$D_3(r) = \frac{\rho_{30} r}{3}$$

Endelig kan vi bruke sammenhengen mellom E_3 og D_3 til å bestemme det elektriske feltet:

$$E_3(r) = \frac{D_3(r)}{\varepsilon} = \frac{D_3(r)}{2\varepsilon_0} = \frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

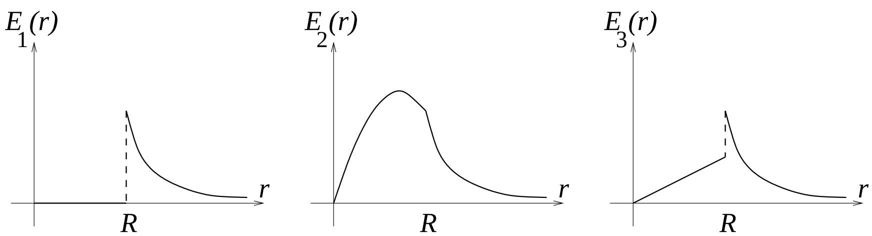
Er vi på utsiden av kula, er netto ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ igjen lik Q, slik at

$$E_3(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dersom $r > R$.
Vi ser at begge uttrykkene for E_3 har sin maksimale verdi ved $r = R$. Feltet "like innenfor" kulas overflate er imidlertid bare halvparten så stort som feltet "like utenfor" kulas overflate. Dette skyldes at vi har fått indusert en positiv ladning på kulas overflate pga polariseringen av den dielektriske kula. Tilsvarende har vi en indusert negativ ladning inne i kula som resulterer i at det totale elektriske feltet inne i kula blir mindre enn om den ikke hadde vært dielektrisk ("polariserbar"). Uansett: Konklusjonen blir at E_3 har sin maksimale verdi på, eller like utenfor, kulas overflate, dvs $r_3 = R$. Verdien av feltstyrken er der

$$E_3(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Skisse av de tre feltstyrkene:

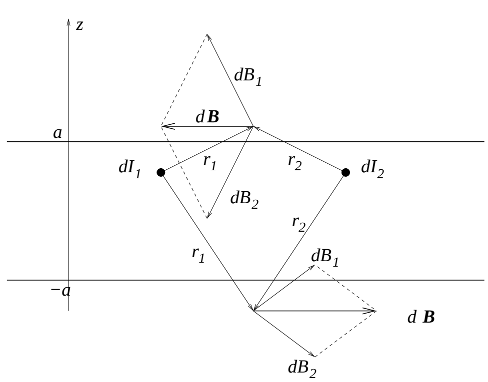


OPPGAVE 2 (Hver deloppgave a og b teller 10% hver)

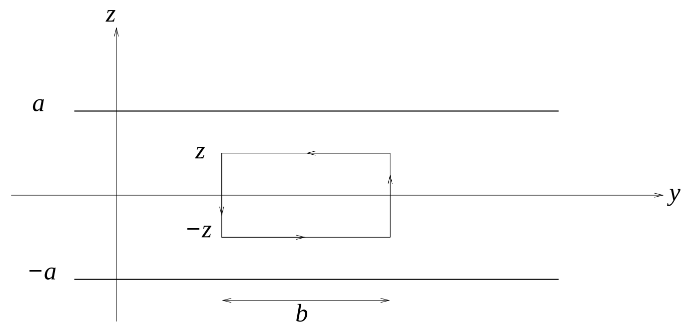
a) Total strøm på stripe med bredde b i y-retning:

$$\begin{aligned} I_b &= \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_{-a}^{a} j_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) b\, dz \\ &= j_0 b \left(a - a/3 + a - a/3\right) = \frac{4}{3} j_0 a b \end{aligned}$$

Retning på $\boldsymbol{B}$: Se på bidraget til magnetfeltet fra to tynne "tråder" som fører strøm dI_1 og dI_2. Kan bruke Biot-Savarts lov til å finne retningen på $d\boldsymbol{B}$ over og under $z = 0$. Av symmetrigrunner må retningen på det totale feltet bli likedan. (Se figur under.)



b) Ettersom B er oppgitt å være en antisymmetrisk funksjon av z, velger vi et rektangel symmetrisk plassert omkring xy-planet, med bredde b i y-retning, høyde $2z$ i z-retning og flatenormal i x-retning:



Integrerer mot klokka på venstre side av Amperes lov og finner:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = B(z) \cdot b + B(z) \cdot b = 2B(z) \cdot b = \mu_0 I_{\text{in}}(z)$$

Strømmen som er omsluttet av ampererektanglet er

$$I_{\text{in}}(z) = \frac{4}{3} j_0 ab$$

dersom rektanglet omslutter hele skiva, dvs $z > a$, og

$$I_{\text{in}}(z) = \int_{-z}^{z} j_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) b\, dz = 2j_0 b \left(z - \frac{z^3}{3a^2}\right)$$

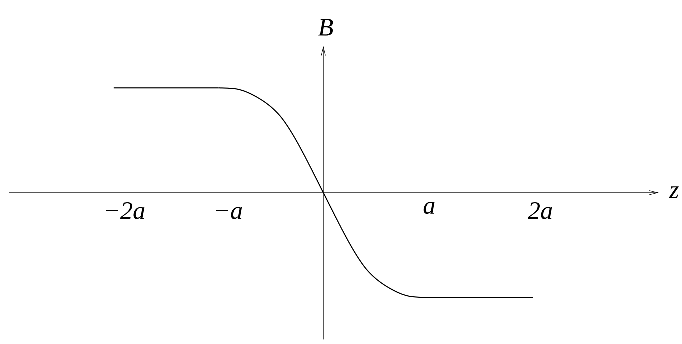
dersom $z < a$. Magnetfeltet blir derfor

$$B(z) = \frac{2}{3} \mu_0 j_0 a$$

på utsiden av skiva $(z > a)$ og

$$B(z) = \mu_0 j_0 \left(z - \frac{z^3}{3a^2}\right)$$

inni skiva $(z < a)$, og med retning som angitt i oppgaveteksten, dvs i positiv y-retning for $z < 0$ og i negativ y-retning for $z > 0$.
Skisse av $B(z)$:



OPPGAVE 3 (Teller 15%)

Her kan vi f.eks. starte med å bestemme kretsens ekvivalente motstand, dvs den "totale" motstanden R_t som ville gi samme totale strøm, her I_1, med en gitt ems V_0. Vi vet hvordan vi skal beregne total motstand til serie- og parallellkoblede motstander og setter i gang:

$$R_t = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{345}}\right)^{-1}$$

$$R_{345} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{3R}{2}$$

$$\Rightarrow R_t = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{3R}\right)^{-1} = \frac{8R}{5}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_0}{R_t} = \frac{8}{8/5} = 5 \text{ A}$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 5 \text{ V}$$

$$\Rightarrow V_2 = 3 \text{ V} \quad \Rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

$$\Rightarrow I_3 = I_1 - I_2 = 2 \text{ A} \quad \Rightarrow I_4 = I_5 = 1 \text{ A}$$

OPPGAVE 4 (Hver deloppgave a, b og c teller 10% hver)

a) Ingen likestrøm gjennom kondensator:

$$I_C = 0$$

Dermed:

$$I_R = I_L$$

Alle strømmer tidsuavhengige, også I_L. Dermed null spenningsfall over induktansen:

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

Dermed heller ikke noe spenningsfall over kondensatoren:

$$V_C = \frac{Q}{C} = 0$$

dvs

$$Q = 0$$

Altså hele den påtrykte spenningen V_0 over motstanden, slik at

$$I_R = I_L = \frac{V_0}{R}$$

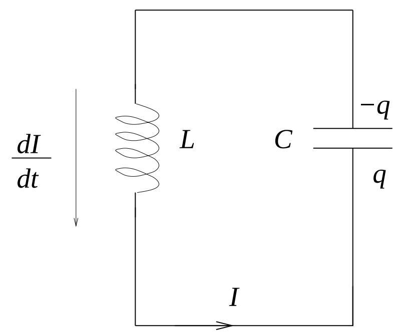
b) Startbetingelsene ved $t = 0$ for strøm I og ladning q er altså:

$$I(0) = I_L = \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad q(0) = Q = 0$$

Kirchhoffs spenningsregel anvendt på kretsen med L og C gir

$$\begin{aligned} L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} &= 0 \\ L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} &= 0 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $\omega = 1/\sqrt{LC}$.



Startbetingelsene for q og $I = dq/dt$ gir:

$$q(0) = 0 = A$$

$$I(0) = \frac{V_0}{R} = \dot{q}(0) = \omega B = B/\sqrt{LC}$$

dvs

$$B = \frac{V_0}{\omega R} = \frac{\sqrt{LC}V_0}{R}$$

c) Fra forrige punkt:

$$q(t) = \frac{V_0}{\omega R}\sin\omega t$$

$$I(t) = \dot{q}(t) = \frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

Dermed er det bare å sette inn:

$$U_C = \frac{1}{2C}\cdot\frac{V_0^2}{\omega^2R^2}\sin^2\omega t = \frac{V_0^2L}{2R^2}\sin^2\omega t$$

$$U_L = \frac{L}{2}\cdot\frac{V_0^2}{R^2}\cos^2\omega t = \frac{V_0^2L}{2R^2}\cos^2\omega t$$

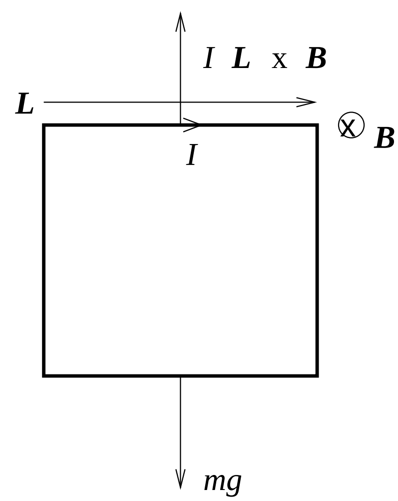
Total energi lagret i L og C blir

$$U = U_C + U_L = \frac{V_0^2L}{2R^2}\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = \frac{V_0^2L}{2R^2}$$

altså tidsuavhengig.
En reell krets har ikke null resistans. Med en viss resistans i kretsen vil energien etterhvert gå over til varme.

OPPGAVE 5 (Teller 15%)

Den magnetiske fluksen inn i planet *reduseres* når sløyfa faller. Da må det induseres en elektromotorisk spenning $\mathcal{E}$ og tilhørende strøm I i sløyfa med retning slik at fluksen på grunn av bidraget til magnetfeltet fra I peker inn i planet på innsiden av sløyfa. (Lenz' lov.) Det oppnås ved at indusert ems har retning *med* klokka.
Konstant fallhastighet v betyr at tyngdekraften mg, som virker nedover, akkurat må balanseres av en magnetisk kraft på den øverste horisontale lederbiten, med retning oppover.



$$mg = ILB \quad \Rightarrow \quad I = \frac{mg}{BL}$$

Indusert ems $\mathcal{E}$ er gitt ved Faradays induksjonslov:

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = B\frac{dA}{dt} = BL\frac{dy}{dt} = BLv$$

(med y-aksen vertikalt). Hvis sløyfa har resistans R, gir Ohms lov

$$\mathcal{E} = RI$$

Kombinasjon av disse to, samt uttrykket for I, gir

$$v = \frac{RI}{BL} = \frac{mgR}{B^2L^2}$$

En leder med lengde l, tverrsnitt S og elektrisk konduktivitet σ har resistans

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Dette kan vi raskt utlede fra den oppgitte formen av Ohms lov:

$$j = \sigma E \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{S} = \sigma\frac{\mathcal{E}}{l} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{l}{\sigma S}$$

Den kvadratiske ledersløyfa har lengde $l = 4L$ slik at

$$R = \frac{4L}{\sigma S}$$

Med massetetthet ρ og volum $V = 4L \cdot S$ kan sløyfas masse m uttrykkes ved

$$m = \rho V = \rho \cdot 4L \cdot S$$

Vi setter inn for R og m i uttryket for fallhastigheten v og finner:

$$v = \frac{\rho \cdot 4L \cdot S \cdot g \cdot 4L}{B^2 L^2 \cdot \sigma \cdot S} = \frac{16\rho g}{B^2 \sigma} = \frac{16 \cdot 10.5 \cdot 10^3 \cdot 9.8}{1 \cdot 6.3 \cdot 10^7} = 0.026 \text{ m/s}$$

evt $v = 2.6$ cm/s.