Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Løsningsforslag til Midtsemesterprøven 10. oktober 2003, versjon 5.

1) **C**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

dersom

$$d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{E}$$

2) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = -15\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\hat{x}$$

3) **A**

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

4) **A**

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\hat{x}$$

For $x > 0$:

$$V(x) = V_0 - \int_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx' = V_0 - \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}$$

For $x < 0$:

$$V(x) = V_0 - \int_0^x \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\,dx' = V_0 + \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}$$

5) **C**

$$V = 20\mathrm{V} - \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow x = 20 \cdot \frac{2\varepsilon_0}{\sigma} = 20 \cdot \frac{2}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = \frac{5}{9\pi} = 0.18\mathrm{m} = 18\mathrm{cm}$$

6) **D**
A er tull, V er en *skalar* størrelse og det er E som måles i N/C.

7) **A**

$$E_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\max}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{Q_{\max}}{9\cdot 10^{-2}} = 10^{11} Q_{\max}$$

$$\Rightarrow Q_{\max} = \frac{3\cdot 10^6}{10^{11}} = 30\cdot 10^{-6}\text{C} = 30\ \mu\text{C}$$

8) **B**

Sammenhengende elektrisk leder har konstant potensial V i likevekt.

9) **A**

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3\right) \\ &= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{1}{0.5}\left(50+75+150\right)\cdot 10^{-6-6} \\ &= 18\cdot 10^9 \cdot 275\cdot 10^{-12} \\ &= 4.95\ \text{J} \end{aligned}$$

10) **C**

Som forrige oppgave, men med $q_2 = -10\ \mu\text{C} \Rightarrow$

$$U = 18\cdot 10^9 \cdot (-50+75-150)\cdot 10^{-12} = -2.25\ \text{J}$$

11) **A**

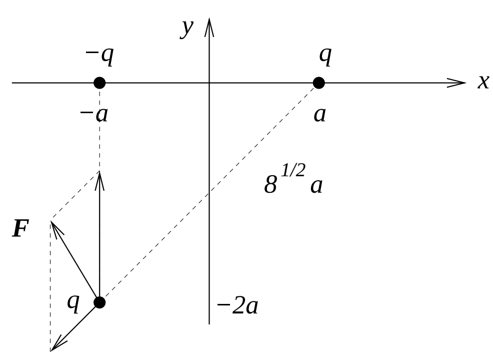
$$Q = +Ne = 3\cdot 10^{11}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\text{C} = 4.8\cdot 10^{-8}\text{C} = 48\ \text{nC}$$

12) **B**

Med bare den ene kula ladet og den andre nøytral, ville vi ha fått indusert ladning i den nøytrale kula, og dermed netto *tiltrekning*.

13) **A**

Her er det nok å betrakte retningene på delkreftene som bidrar:



Med Pytagoras har vi at avstanden mellom de to positive ladningene er $\sqrt{8}a$. Ettersom Coulombkraften er proporsjonal med $1/r^2$, må da kraften mellom de to positive bli halvparten så stor som kraften mellom den negative og den positive. Vektorsummen blir som vist i figuren, altså en total kraft $\boldsymbol{F}$ med *negativ* x-komponent og *positiv* y-komponent.

14) **D**

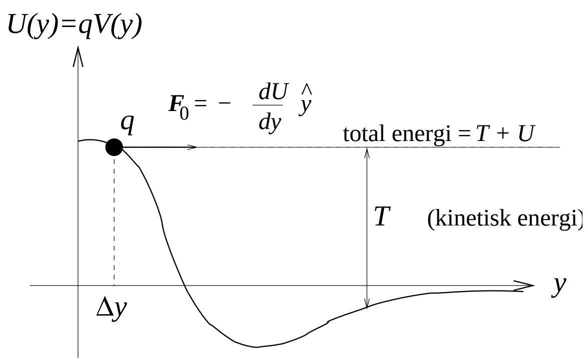
Her er det vel opplagt at B er en mulig løsning: Dersom $b \to 0$, har vi essensielt to punktladninger $-Q$ i $x = \pm a$, og ladningen q trekkes i retning origo. Ladningens energi vil veksle mellom potensiell og kinetisk, med minst potensiell og størst kinetisk energi i origo, og null kinetisk energi i $y = \pm\Delta y$.

I neste omgang er det vel naturlig å ta stilling til om alternativ A er en mulighet. Første tanke tilsier kanskje nei, for når q kommer veldig langt unna, ser den jo essensielt en punktladning $-2Q + Q + Q - 2Q = -2Q$, og erfarer dermed en tiltrekkende kraft, dvs i retning tilbake mot origo. Dette resonnementet ville da også ha vært riktig dersom q ble plassert med null hastighet langt ute på y-aksen. Her starter imidlertid q med null hastighet i $y = \Delta y$. Hvis vi nå lar b bli riktig stor, må potensialet fra ladningene på x-aksen bli tilnærmet

$$V(\Delta y) \simeq \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

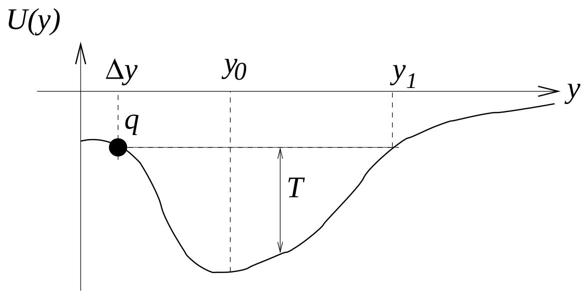
Her har vi neglisjert bidraget fra de to negative punktladningene, ettersom $b \gg a$. Vi har også antatt $\Delta y \ll a$ og tilnærmet avstanden mellom q og Q med a. (Dette siste var ikke strengt tatt nødvendig, bare vi har $\Delta y \ll b$.)

Nå kommer poenget: Vi har altså $V(\Delta y) > 0$, og følgelig at potensiell energi for ladningen q, dvs $qV(\Delta y)$, er positiv. Med null starthastighet er dette også ladningens totale energi, som altså er positiv. I grensen $y \to \infty$ har vi null potensial, og følgelig null potensiell energi for ladningen q. På grunn av energibevarelse må derfor q ha *positiv kinetisk energi* for alle $y > \Delta y$, og vil forsvinne mot $y = \infty$. Følgende figur illustrerer energiforholdene til ladningen q når $b \gg a$:



Har en klart å overbevise seg om at både A og B er mulige alternativ, behøver en egentlig ikke å ta stilling til C: Riktig svar må bli D.

Fra figuren kan en vel imidlertid også innse at C må være en mulig løsning: Etterhvert som vi reduserer verdien av b, må vi til slutt nå et punkt der $V(\Delta y) = 0$. Da er total energi akkurat stor nok til at q kan forsvinne mot uendelig. En ytterligere reduksjon i b fører til at $V(\Delta y)$ blir mindre enn null, og da er total energi for liten til at q kan "unnslippe". Den vil bevege seg utover y-aksen inntil den kommer til y_1 hvor V er lik $V(\Delta y)$. Her er igjen kinetisk energi $T = 0$. Ladningen snur og vender tilbake til startpunktet, og slik vil den oscillere fram og tilbake:



Har vi friksjon, vil partikkelen tape energi (som varme til omgivelsene) og utføre oscillasjoner med stadig mindre utsving. Til slutt ender den opp i likevektsposisjonen y_0.
Denne oppgaven var kanskje ikke av de enkleste, og det var da heller ikke meningen!

15) **B**

$$F = k/r^2, \quad F' = k/(1.2r)^2 = k/1.44r^2 = 0.69k/r^2 = 0.69F$$

16) **B**
Vi vet at en ladet metallkule *velger* alternativ 1, nemlig netto ladning jevnt fordelt på *overflaten*. Det må bety at $U_1 < U_2$, og det er bare tilfelle i B.
Denne oppgaven var også ment å representere en liten utfordring!

17) **A**
Det elektriske feltet fra den ladete glass-staven induserer ladning i metallkulene, slik at den nærmeste kula, dvs den til venstre, får et overskudd av frie elektroner. Altså må kula til venstre ha fått negativ ladning.

18) **C**
Ifølge Gauss' lov er netto elektrisk fluks ut gjennom en lukket flate bestemt av netto ladning innenfor flaten. Her er netto ladning innenfor de tre flatene like stor, $Q_{\text{in}} = \pi R^2 \sigma$, og derfor er netto fluks ut gjennom flatene også like stor.

19) **A**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \quad \Rightarrow \quad V_1 > V_2 > V_3 > V_4$$

20) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

21) **B**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ eV}$$

22) **B**
Gauss' lov for $\boldsymbol{D}$ gir

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{for} \quad r > a$$

Ettersom $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ blir det elektriske feltet

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ q/16\pi\varepsilon_0 r^2 & a < r < 3a/2 \\ 0 & 3a/2 < r < 2a \\ q/4\pi\varepsilon_0 r^2 & r > 2a \end{cases}$$

23) **B**

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{(\sigma/\varepsilon_0)d} = \frac{Q\varepsilon_0}{(Q/A)d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

24) **A**

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-3}} \simeq 0.9 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

25) **C**

$$\Delta V \to \frac{2}{3}\Delta V$$

fordi $E = 0$ i metallskiva og uendret ellers. Dermed:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \to \frac{3}{2}C_0$$

26) **A**
Her svekkes E inne i dielektrikumet. D er derimot konstant, og kun bestemt av den *frie* ladningen på metallplatene.

27) **D**
Gauss' lov gir

$$\begin{aligned} E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r')\, dV \\ &= \frac{k}{\varepsilon_0}\int_0^r r' \cdot 4\pi (r')^2\, dr' \\ &= \frac{4\pi k}{\varepsilon_0}\Big|_0^r \frac{1}{4}(r')^4 \\ &= \frac{\pi k}{\varepsilon_0} r^4 \end{aligned}$$

for $r < R$. Altså

$$E(r) = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0}$$

for $r < R$. (For $r > R$ blir feltet som for en punktladning i origo, dvs prop. med $1/r^2$, likt i alle de fire grafene.)

28) **D**
Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom en lukket flate som omslutter en punktladning q lik

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Av symmetrigrunner må det passere en like stor andel av denne fluksen ut gjennom overflaten av den inntegnede kuben som ut gjennom de "resterende" 7 kubene som skal til for å lage en kube med q i sentrum. (8 oktanter i et 3-dimensjonalt koordinatsystem!) Hver av disse 8 kubene har 3 "hosliggende" sideflater der $\boldsymbol{E}$ er parallell med flaten (dvs $\boldsymbol{E}$ normalt på flatenormalen). Altså går det ingen fluks gjennom disse. Videre har hver av de 8 kubene 3 likeverdige "motstående" sideflater, og den skraverte flaten er en av disse. Uten å regne kan vi fastslå at det må gå like stor fluks gjennom hver av disse 3. Den "store kuben" med q i sentrum har da i alt 24 slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem må bli

$$\phi = \frac{\phi_{\text{tot}}}{24} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

29) **D**
Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Dvs: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m gjennom en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV, gir økning i kinetisk energi, $mv^2/2$. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_\alpha V_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{\text{Be}} V_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}}}$$

med andre ord

$$\frac{V_{\text{Be}}}{V_\alpha} = \frac{q_\alpha m_{\text{Be}}}{q_{\text{Be}} m_\alpha} = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8}$$

30) **D**
Elektrisk polarisering P er pr definisjon elektrisk dipolmoment p_{tot} pr volumenhet V:

$$P = \frac{p_{\text{tot}}}{V} = \frac{Np}{V} = \frac{55.6 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 6.2 \cdot 10^{-30}}{10^{-3}} \simeq 0.21 \text{ C/m}^2$$

Her er N antall vannmolekyler i en liter vann. (Husk at 1 L = 10^{-3} m^3.)

31) **A**
Pr definisjon er elektrisk felt lik elektrisk kraft pr ladningsenhet.

32) **C**
Det at $E = 0$ inne i en elektrisk leder i elektrostatisk likevekt har ingenting med Gauss' lov å gjøre. Det uttrykker bare at alle krefter på de frie ladningene må være lik null i likevekt.

33) **D**
Det er bare tull å påstå at $V = 0$ i en leder. Det vi *kan* si er at V er konstant i en leder. Vi *velger* $V = 0$ der det passer oss.

34) **D**
Vi kan starte fra definisjonen av elektrisk fluks, $\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$, og skrive ned en rekke ulike mulige enheter:

$$[\phi_E] = [E \cdot A] = [\frac{V}{l} \cdot l^2] = [V \cdot l] = [\frac{Q}{C} \cdot l] = [\frac{U}{Q} \cdot l]$$

Altså er disse enhetene mulige:
$[\phi_E] = (\mathrm{V/m})\mathrm{m}^2 = \mathrm{Vm} = \mathrm{Cm/F} = \mathrm{Jm/C}$.
Den siste, NV/J, er imidlertid ikke riktig.

35) **D**
Når vi kjenner det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ i et område, kan vi bestemme romladningstettheten ρ ved å bruke Gauss' lov på differensialform,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

I kartesiske koordinater er divergensoperatoren

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

slik at vi får

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 24\pi \cdot (1 + 1 + 1) = 2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^3} = 2\ \mathrm{nC/m^3}$$

36) **D**
Med en potensialforskjell ΔV mellom kondensatorplatene er det elektriske feltet mellom platene

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

der d er avstanden mellom platene. En halvering av ΔV vil altså halvere E.
I et område med elektrisk felt E er energien pr volumenhet

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

slik at total energi lagret i det elektriske feltet i en platekondensator er

$$U = \int u\, dV = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot V$$

ettersom E er konstant mellom platene. Her er V volumet mellom platene. Halvering av E reduserer altså U til fjerdeparten.

37) **C**
Vi må alltid utføre et *positivt* arbeid på ladningene for å lade opp ei metallkule, enten den er positiv eller negativ. Altså er alltid $U > 0$. (Merk opplysningen gitt på side 1: Dersom ikke annet er oppgitt, er nullpunkt for potensiell energi valgt uendelig langt borte.)

38) **A**
Denne har vi regnet som et eksempel på en forelesning, så det skulle kunne gå an å regne ut feltet eksplisitt. Enklest er det imidlertid å se litt på de ulike alternativene i tilfellene $x = 0$ og $x \to \infty$, der vi *vet* hva feltet må være: Henholdsvis $E = 0$ og $E = Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$.
$E(x = 0) = 0$ gjør at vi kan eliminere B og D. $E(x \to \infty) = Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$ eliminerer både B, C og D, mens A stemmer.

39) **C**

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}$$

Newtons 2. lov! Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\boldsymbol{a} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}$$

altså mot venstre.

40) **C**
Konservativt felt betyr at

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

Dette er i orden for A, B og D, men ikke for C:

$$\nabla \times (kx^2\ \hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kx^2 & 0 \end{vmatrix} = +\ \hat{z}\ \frac{\partial(kx^2)}{\partial x} = 2kx\ \hat{z}$$