Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Løsningsforslag til Midtsemesterprøven 17. oktober 2003, versjon 1.

1) **B**
$m_p/m_e \simeq 2000$

2) **C**
Vi har for divergensen til $\boldsymbol{E}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

som er ulik null der romladningstettheten ρ er ulik null.

3) **B**

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -|q|\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a} = -\nabla U = |q|\nabla V$$

for en partikkel med negativ ladning. Følgelig er

$$\boldsymbol{a} = -\frac{|q|}{m}\boldsymbol{E} = \frac{|q|}{m}\nabla V = -\frac{1}{m}\nabla U$$

dvs $\boldsymbol{F}$ peker i retning av lavere potensiell energi U.

4) **C**
Vi har f.eks. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/Q$ og $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$. Dessuten er $C = Q/\Delta V$. Vi kan da skrive ned en rekke ulike mulige enheter:

$$[E] = [F/Q] = [\Delta V/l] = [F/C\Delta V]$$

Altså er disse enhetene mulige:
$[E]$ = N/C = V/m = N/FV.
Den siste, kg $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ C, er imidlertid ikke riktig. (Det skal ikke være m^2, bare m.)

5) **D**
Superposisjonsprinsippet gjelder for $\boldsymbol{F}$. Ettersom $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$ og $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$, må det også gjelde for $\boldsymbol{E}$ og ΔV.

6) **C**
Når vi kjenner det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ i et område, kan vi bestemme romladningstettheten ρ ved å bruke Gauss' lov på differensialform,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

I kartesiske koordinater er divergensoperatoren

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

slik at vi får

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 12\pi \cdot (1 - 3 - 4) = -2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^3} = -2\ \mathrm{nC/m^3}$$

7) **A**
Denne har vi regnet på en øving, så det skulle kunne gå an å regne ut feltet eksplisitt. Enklest er det imidlertid å se litt på de ulike alternativene i grensen $x \to \infty$, der vi *vet* hva feltet må være, nemlig $E = Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$:

$$\mathrm{B}: E \to Q/2\pi\varepsilon_0 R^2, \quad \text{feil!}$$

$$\mathrm{C}: E \to Q/2\pi\varepsilon_0 R^2, \quad \text{feil!}$$

$$\mathrm{D}: E \to Q/\pi\varepsilon_0 R^2, \quad \text{feil!}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}: \quad & 1 - x(x^2 + R^2)^{-1/2} = \\
& 1 - x \cdot x^{-1}\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \simeq \\
& 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}\right) = \frac{R^2}{2x^2} \Rightarrow \\
& E \to Q/4\pi\varepsilon_0 x^2, \quad \text{OK!}
\end{aligned}$$

8) **D**
Konservativt felt betyr at

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

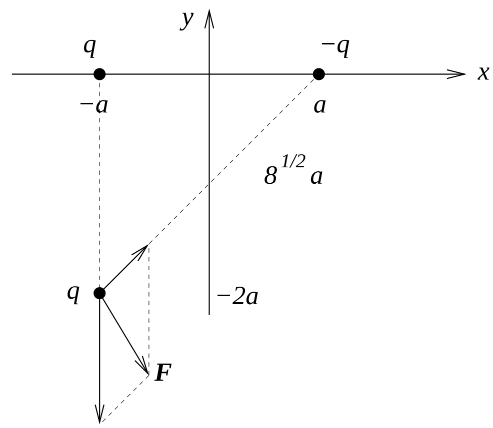
Dette er *ikke* i orden for A, B og C, men i orden for D:

$$\nabla \times [k(z\ \hat{y} + y\ \hat{z})] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & kz & ky \end{vmatrix} = \hat{x}\ \frac{\partial(ky)}{\partial y} - \ \hat{x}\ \frac{\partial(kz)}{\partial z} = \hat{x}\,(k - k) = 0$$

9) **C**

$$Q = +Ne = 5 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} = 8 \cdot 10^{-10}\mathrm{C} = 0.8\ \mathrm{nC}$$

10) **C**
Her er det nok å betrakte retningene på delkreftene som bidrar:

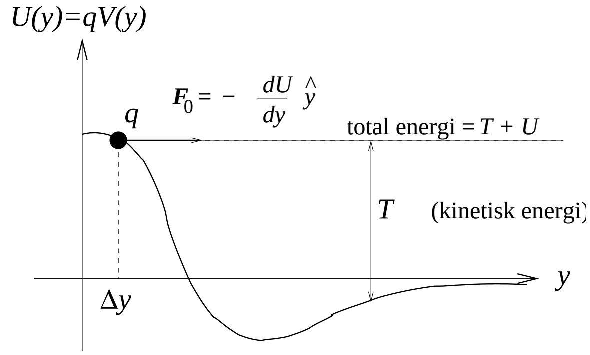


Med Pytagoras har vi at avstanden mellom den positive og den negative ladningen er $\sqrt{8}a$. Ettersom Coulombkraften er proporsjonal med $1/r^2$, må da kraften mellom disse bli halvparten så stor som kraften mellom de to positive. Vektorsummen blir som vist i figuren, altså en total kraft $\boldsymbol{F}$ med *positiv* x-komponent og *negativ* y-komponent.

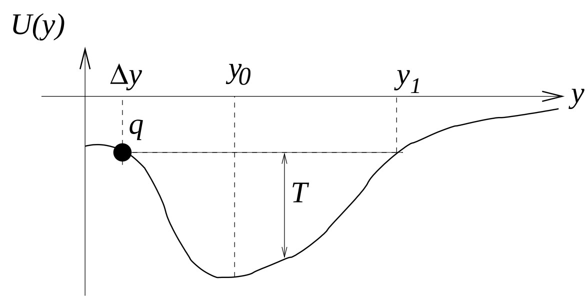
11) **D**
Her er det vel opplagt at B er en mulig løsning: Dersom $b \to 0$, har vi essensielt to punktladninger $-Q$ i $x = \pm a$, og ladningen q trekkes i retning origo. Ladningens energi vil veksle mellom potensiell og kinetisk, med minst potensiell og størst kinetisk energi i origo, og null kinetisk energi i $y = \pm \Delta y$.
I neste omgang er det vel naturlig å ta stilling til om alternativ A er en mulighet. Første tanke tilsier kanskje nei, for når q kommer veldig langt unna, ser den jo essensielt en punktladning $-2Q + Q + Q - 2Q = -2Q$, og erfarer dermed en tiltrekkende kraft, dvs i retning tilbake mot origo. Dette resonnementet ville da også ha vært riktig dersom q ble plassert med null hastighet langt ute på y-aksen. Her starter imidlertid q med null hastighet i $y = \Delta y$. Hvis vi nå lar b bli riktig stor, må potensialet fra ladningene på x-aksen bli tilnærmet

$$V(\Delta y) \simeq \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Her har vi neglisjert bidraget fra de to negative punktladningene, ettersom $b \gg a$. Vi har også antatt $\Delta y \ll a$ og tilnærmet avstanden mellom q og Q med a. (Dette siste var ikke strengt tatt nødvendig, bare vi har $\Delta y \ll b$.)
Nå kommer poenget: Vi har altså $V(\Delta y) > 0$, og følgelig at potensiell energi for ladningen q, dvs $qV(\Delta y)$, er positiv. Med null starthastighet er dette også ladningens totale energi, som altså er positiv. I grensen $y \to \infty$ har vi null potensial, og følgelig null potensiell energi for ladningen q. På grunn av energibevarelse må derfor q ha *positiv kinetisk energi* for alle $y > \Delta y$, og vil forsvinne mot $y = \infty$. Følgende figur illustrerer energiforholdene til ladningen q når $b \gg a$:



Har en klart å overbevise seg om at både A og B er mulige alternativ, behøver en egentlig ikke å ta stilling til C: Riktig svar må bli D.
Fra figuren kan en vel imidlertid også innse at C må være en mulig løsning: Etterhvert som vi reduserer verdien av b, må vi til slutt nå et punkt der $V(\Delta y) = 0$. Da er total energi akkurat stor nok til at q kan forsvinne mot uendelig. En ytterligere reduksjon i b fører til at $V(\Delta y)$ blir mindre enn null, og da er total energi for liten til at q kan "unnslippe". Den vil bevege seg utover y-aksen inntil den kommer til y_1 hvor V er lik $V(\Delta y)$. Her er igjen kinetisk energi $T = 0$. Ladningen snur og vender tilbake til startpunktet, og slik vil den oscillere fram og tilbake:



Har vi friksjon, vil partikkelen tape energi (som varme til omgivelsene) og utføre oscillasjoner med stadig mindre utsving. Til slutt ender den opp i likevektsposisjonen y_0.
Denne oppgaven var kanskje ikke av de enkleste, og det var da heller ikke meningen!

12) **B**

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{36 \cdot 25 \cdot 10^{-18}}{(9 \cdot 10^{-3})^2} = 10^{-1} = 0.1 \text{ N}$$

13) **B**

$$\boldsymbol{E} = E\ \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -eE\ \hat{z}$$

14) **B**
Det elektriske feltet fra den ladete glass-staven, $\boldsymbol{E}_{\text{glass}}$, er rettet mot høyre. Dette svekkes riktignok inne i dielektrikumet (på grunn av innretting av elektriske dipoler, dvs *polarisering*), men vi har fremdeles $\boldsymbol{E}_{\text{total}}$ rettet mot høyre. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, må vi da ha $V_1 > V_2 > V_3$.

15) **A**
Samme utgangspunkt som i oppgave 14, men fri ladning i metallet sørger for at $\boldsymbol{E}_{\text{total}} = 0$ inne i metallet. Dermed er potensialet V konstant overalt i metallet.

16) **A**
Ifølge Gauss' lov er netto elektrisk fluks ut gjennom en lukket flate bestemt av netto ladning innenfor flaten. Her er netto ladning innenfor de tre flatene henholdsvis

$$Q_{\text{in}}^{a} = \sigma A_a = \sigma \cdot 4R^2$$

$$Q_{\text{in}}^{b} = \sigma A_b = \sigma \cdot \pi R^2$$

$$Q_{\text{in}}^{c} = \sigma A_c = \sigma \cdot 3R^2$$

Følgelig er

$$\phi_E^a > \phi_E^b > \phi_E^c$$

17) **B**
Vi vet at en ladet metallkule *velger* alternativ 1, nemlig netto ladning jevnt fordelt på *overflaten.* Det må bety at $U_1 < U_2$, og det er bare tilfelle i B.
Denne oppgaven var også ment å representere en liten utfordring!

18) **A**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 2}$$

19) **A**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Potensialet endrer seg raskest dersom

$$d\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{E}$$

20) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = +\left(5\frac{\text{V}}{\text{m}^2}\right) \cdot 2x \cdot \hat{x} = \left(10\frac{\text{V}}{\text{m}^2}\right) x \cdot \hat{x}$$

21) **B**

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -7\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

22) **D**

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

med retning *inn mot* planet. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at V *øker* lineært bort fra planet på begge sider. Altså er $V \geq 20$ V overalt.

23) **D**
$\boldsymbol{E} = -\nabla V$, dvs $\boldsymbol{E}$ peker i retning av lavere potensial, og står dessuten normalt på ekvipotensialflaten.

24) **D**

$$E_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\max}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_{\max}}{25 \cdot 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow Q_{\max} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9} \cdot 3 \cdot 10^6 = \frac{25}{3} \cdot 10^{-7}\text{C} = 0.83\ \mu\text{C}$$

25) **B**
I likevekt er alltid netto ladning inne i ei metallkule lik null.

26) **C**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.5 \cdot 10^{10} = 7.2\ \text{eV}$$

27) **C**
$q(\text{elektron}) = -e$, $q(\text{proton}) = +e$

$$\Rightarrow$$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

altså kurve 3.

28) **C**

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3\right) \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{0.5}\left(200 + 300 + 600\right) \cdot 10^{-6-6} \\
&= 18 \cdot 10^{-3} \cdot 1100 \\
&= 19.8\ \text{J}
\end{aligned}$$

29) **B**
Som forrige oppgave, men med $q_3 = +30\ \mu\text{C} \Rightarrow$

$$U = 18 \cdot 10^{-3} \cdot (-700) = -12.6\ \text{J}$$

30) **B**

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{(\sigma/\varepsilon_0)d} = \frac{Q\varepsilon_0}{(Q/A)d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

31) **A**

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{(3 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 10^{-3}} \simeq 4.0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

32) **D**
Med en potensialforskjell V_0 mellom kondensatorplatene er det elektriske feltet mellom platene

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

der d er avstanden mellom platene. En fordobling av potensialforskjellen vil altså fordoble den elektriske feltstyrken.
I et område med elektrisk felt E er energien pr volumenhet

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

slik at total energi lagret i det elektriske feltet i en platekondensator er

$$U = \int u\, dV = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot V$$

ettersom E er konstant mellom platene. Her er V volumet mellom platene. Dobling av E firedobler altså U.

33) **A**
E svekkes i plastlaget i forhold ti lufta utenfor, med en faktor $1/\varepsilon_r = 1/3$. D er derimot konstant, og kun bestemt av fri ladning på metallkula.

34) **D**
Dette er en seriekobling av 3 kapasitanser:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_{\text{luft}}} + \frac{1}{C_{\text{diel}}} + \frac{1}{C_{\text{luft}}} = \frac{d/3}{\varepsilon_0 A} + \frac{d/3}{3\varepsilon_0 A} + \frac{d/3}{\varepsilon_0 A} = \frac{7d}{9\varepsilon_0 A} = \frac{7}{9C_0}$$

Alternativt:
$\boldsymbol{E}$ er uendret i luftlagene, men i dielektrikumet får vi

$$\boldsymbol{E} \to \frac{1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E} = \frac{1}{3}\boldsymbol{E}$$

Dermed:

$$\Delta V = 2 \cdot \frac{d}{3} \cdot E + \frac{d}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot E = \frac{7}{9} \cdot d \cdot \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

og kapasitansen blir

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{9}{7} = \frac{9}{7}C_0$$

Alternativt:
Vi vet at for en gitt ΔV mellom platene må Q økes dersom vi setter inn et dielektrikum, dette for å *opprettholde* den samme ΔV ettersom vi får indusert overflateladning på dielektrikumet (polarisering). Dermed må også C_1 være større enn C_0, og kun alternativ D er mulig.

35) **C**
Her er grafene 1 og 2 umiddelbart utelukket fordi $E = 0$ i metallet. Videre må vi få et *svakere* elektrisk felt i området $3a < x < 4a$ enn i området $0 < x < a$ fordi vi her har et dielektrikum med større relativ permittivitet. Da får vi her en sterkere polarisering av mediet, og en sterkere reduksjon i E. Følgelig må graf 3 være den riktige.

36) **D**

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 22 \cdot 10^3}{9.11 \cdot 10^{-31}}} \text{ m/s } = 8.8 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

37) **A**
Gauss' lov gir

$$\begin{aligned} E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r')\, dV \\ &= \frac{k}{\varepsilon_0} \int_0^r \frac{1}{r'} \cdot 4\pi (r')^2 \, dr' \\ &= \frac{4\pi k}{\varepsilon_0} \bigg|_0^r \frac{1}{2} (r')^2 \\ &= \frac{2\pi k}{\varepsilon_0} r^2 \end{aligned}$$

for $r < R$. Altså

$$E(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0}$$

for $r < R$. (For $r > R$ blir feltet som for en punktladning i origo, dvs prop. med $1/r^2$, likt i alle de fire grafene.)

38) **D**
Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom en lukket flate som omslutter en punktladning q lik

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Av symmetrigrunner må det passere en like stor andel av denne fluksen ut gjennom overflaten av den inntegnede kuben som ut gjennom de "resterende" 7 kubene som skal til for å lage en kube med q i sentrum. (8 oktanter i et 3-dimensjonalt koordinatsystem!) Hver av disse 8 kubene har 3 "hosliggende" sideflater der $\boldsymbol{E}$ er parallell med flaten (dvs $\boldsymbol{E}$ normalt på flatenormalen). Altså går det ingen fluks gjennom disse. Videre har hver av de 8 kubene 3 likeverdige "motstående" sideflater, og den skraverte flaten er en av disse. Uten å regne kan vi fastslå at det må gå like stor fluks gjennom hver av disse 3. Den "store kuben" med q i sentrum har da i alt 24 slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem må bli

$$\phi = \frac{\phi_{\text{tot}}}{24} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

39) **D**
Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Dvs: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m gjennom en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV, gir økning i kinetisk energi, $mv^2/2$. Vi setter indeks 3 for ^{3}He og indeks 4 for ^{4}He. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_3 V_3}{m_3} = \frac{q_4 V_4}{m_4}$$

med andre ord, ettersom $q_3 = q_4$,

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{m_4}{m_3} = \frac{4}{3}$$

40) **B**
Elektrisk polarisering P er pr definisjon elektrisk dipolmoment p_{tot} pr volumenhet V:

$$P = \frac{p_{\mathrm{tot}}}{V} = \frac{Np}{V} = \frac{17.0 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 3.66 \cdot 10^{-30}}{10^{-3}} \simeq 0.037\ \mathrm{C/m^2}$$

Her er N antall etanolmolekyler i en liter. (Husk at 1 L = 10^{-3} m^3.)