Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155 Elektromagnetisme
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til midtsemesterprøven fredag 5. mars kl 0830 – 1130.

Utfylt svartabell bakerst.

Tillatte hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling. (Eller tilsvarende.)
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller enklere.)
- Formelsamling Elektrostatikk er inkludert på baksiden av dette arket.

Opplysninger:

- Kryss av for *ett* alternativ på *hver* oppgave.
- Dersom ikke annet er oppgitt, antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt.
- Dersom ikke annet er oppgitt, er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial", og tilsvarende for "potensiell energi".
- Dersom ikke annet er oppgitt, er nullpunkt for (elektrostatisk) potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte.
- Når det sies at metallkuler o.l. er "små", betyr det essensielt at de påvirker hverandre med krefter som om de var punktladninger.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Noen naturkonstanter: $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $g = 9.8$ m/s^2
- Symboler angis i kursiv (f.eks V for potensial) mens enheter angis uten kursiv (f.eks V for volt).
- SI-prefikser: M (mega) = 10^6, k (kilo) = 10^3, c (centi) = 10^{-2}, m (milli) = 10^{-3}, μ (mikro) = 10^{-6}, n (nano) = 10^{-9}, p (piko) = 10^{-12}.

Formelsamling Elektrostatikk

$\int d\boldsymbol{A}$ angir flateintegral og $\int d\boldsymbol{l}$ angir linjeintegral. $\oint$ angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. **Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

- Coulombs lov:
$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
- Elektrisk fluks:
$$\phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$
- Elektrostatisk kraft er konservativ:
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$
- Gauss' lov for elektrisk felt og elektrisk forskyvning:
$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{fri}}$$
- Elektrisk forskyvning:
$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$
- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$
- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:
$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$
- Kapasitans:
$$C = \frac{q}{V}$$
- Energitetthet i elektrisk felt:
$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Oppgaver med løsningsforslag

1) En partikkel med negativ ladning plasseres med null starthastighet i et elektrostatisk felt $\boldsymbol{E}$. Partikkelens bevegelse blir

A i retning lavere potensial.
B i retning lavere potensiell energi.
C i samme retning som $\boldsymbol{E}$.
D i retning normalt på $\boldsymbol{E}$.

På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.
Matematisk: ($\boldsymbol{F}$ = kraft, q = ladning ($q < 0$), U = potensiell energi, V = potensial)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} = -|q|\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E} &= -\nabla V \\
U &= qV = -|q|V \\
\boldsymbol{F} &= -\nabla U = -q\nabla V = |q|\nabla V
\end{aligned}$$

Partikkelens bevegelse må selvsagt bli i samme retning som $\boldsymbol{F}$ (når starthastigheten er null), så vi ser at bevegelsen blir i motsatt retning av $\boldsymbol{E}$, og i retning høyere potensial V.

---

2) En ballong har et overskudd på $5 \cdot 10^{13}$ elektroner. Da er ballongens ladning

A 80 μC B -80 μC **C** -8 μC D $-3.2 \cdot 10^{-33}$ C

Ballongen har et overskudd på $N = 5 \cdot 10^{13}$ elektroner, hver med ladning $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Da må ballongens ladning være

$$Q = Nq = -Ne = -5 \cdot 1.6 \cdot 10^{13-19} = -8 \cdot 10^{-6}$$

---

3) Vi har snakket mye om størrelsene elektrostatisk kraft $\boldsymbol{F}$, felt $\boldsymbol{E}$ og potensial V. Superposisjonsprinsippet gjelder

A bare for $\boldsymbol{F}$.
B bare for $\boldsymbol{E}$.
C bare for $\boldsymbol{F}$ og $\boldsymbol{E}$.
D for $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$ og V.

Superposisjonsprinsippet slår fast at kraften $\boldsymbol{F}_1$ fra en ladning q_1 på en (test-)ladning q ikke avhenger av om andre ladninger er til stede eller ikke. Dermed, hvis vi har flere "referanseladninger" q_1, q_2, ..., og spør "hvor stor er den totale kraften på en testladning q fra alle referanseladningene?", så kan den bestemmes ved å bestemme kraften på testladningen fra hver av referanseladningene hver for seg, og deretter legge disse delkreftene sammen (vektorielt).
Det elektriske feltet er, pr definisjon, lik den elektriske kraften på testladningen q dividert med verdien av testladningen q, dvs elektrisk kraft pr ladningsenhet. Det betyr at det totale elektriske feltet fra flere "referanseladninger" q_1, q_2, ... kan bestemmes ved å bestemme feltet fra hver av referanseladningene hver for seg, og deretter legge disse "delfeltene" sammen (igjen: vektorielt).
Potensialforskjellen mellom to punkter A og B er gitt ved linjeintegralet av det elektriske feltet langs en (vilkårlig) vei mellom de to punktene:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Potensialforskjellen på grunn av feltet $\boldsymbol{E}_1$ fra ladningen q_1 er dermed

$$\Delta V_1 = -\int_A^B \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l}$$

og tilsvarende for $\boldsymbol{E}_2$ osv. Dermed, ettersom

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + ...$$

har vi

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + ...$$

dvs superposisjonsprinsippet gjelder også for potensialet V.

---

4) Potensialet i et område er

$$V = (8 \text{ V/m})x + (6 \text{ V/m})z + 7 \text{ V}$$

Da er y-komponenten av det elektriske feltet i dette området

A 21 V/m B 7 V/m **C** null D -7 V/m

Sammenhengen mellom potensial V og elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ er

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

som vil si at

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Her avhenger ikke V av y, så $E_y = 0$.

---

5) En metallkule har radius 50 cm. Hvor mye ladning kan akkumuleres på en slik kule før vi får overslag ("coronautladning") i lufta omkring? Overslag i luft inntreffer hvis det elektriske feltet blir større enn 3 MV/m.

A 83 μC   B 53 μC   C 23 μC   D 3 μC

———————

Elektrisk felt på overflaten av en elektrisk leder er $E = \sigma/\varepsilon_0$, der σ er ladning pr flateenhet på lederens overflate. Dette gjelder generelt, ikke bare for kuleformede ledere som her, og kan utledes ved å bruke Gauss' lov (se forelesningene). Med kule må ladningen være jevnt fordelt på overflaten, som har areal $4\pi R^2$. Dermed:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Maksimalt felt er 3 MV/m, radien 0.50 m, slik at

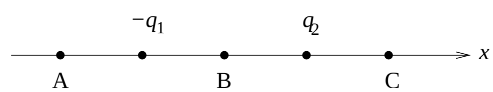
$$Q_{\text{max}} = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_{\text{max}} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 0.50^2 \cdot 3 \cdot 10^6 = 83 \cdot 10^{-6}$$

dvs 83 μC.

---

6) To punktladninger med henholdsvis negativ ladning $-q_1$ og positiv ladning q_2 er plassert på x-aksen som vist i figuren. I hvilke punkter kan vi da ha $E = 0$?

A Bare i B.
B I A eller C.
C I A, B eller C.
D Verken i A, B eller C.



———————

Bidraget $\boldsymbol{E}_2$ til det elektriske feltet fra den positive ladningen q_2 har retning *bort fra* ladningen. $\boldsymbol{E}_2$ må derfor peke mot venstre i A og B og mot høyre i C. Bidraget $\boldsymbol{E}_1$ til det elektriske feltet fra den negative ladningen $-q_1$ har retning *inn mot* ladningen. $\boldsymbol{E}_1$ må derfor peke mot høyre i A og mot venstre i B og C. Totalt felt er $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ som dermed ikke kan bli null i B. I A og C kan feltet bli null, for passende verdier av q_1 og q_2.

---

7) For samme system som i forrige oppgave: I hvilke punkter kan vi ha $V = 0$?

A Bare i B.
B I A eller C.
C I A, B eller C.
D Verken i A, B eller C.

———————

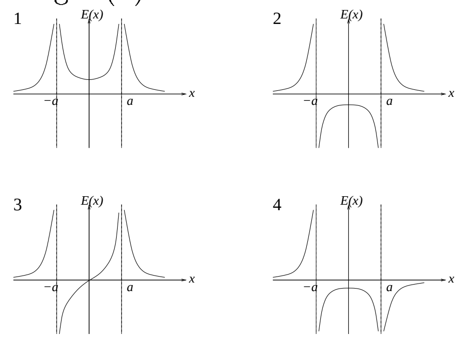
I et punkt som ligger i en avstand r_1 fra $-q_1$ og i en avstand r_2 fra q_2 er potensialet

$$V = -\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_2}$$

Her legger vi sammen to skalare størrelser med motsatt fortegn, så det er klart at V kan bli null i ethvert punkt, selvsagt forutsatt at $q_1/r_1 = q_2/r_2$.

---

8) To punktladninger med henholdsvis negativ ladning $-q$ og positiv ladning q er plassert på x-aksen, med den positive ladningen i $x = a$ og den negative ladningen i $x = -a$. Det elektriske feltet på x-aksen er da $\boldsymbol{E}(x) = E(x)\,\hat{x}$. Hvilken graf angir riktig $E(x)$?



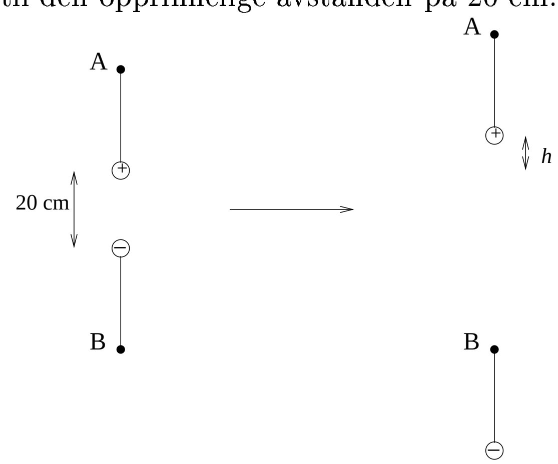
A 1
B 2
C 3
D 4

———————

Systemet er her essensielt som i de to foregående oppgavene, med ladninger som er like store i absoluttverdi. Basert på argumentene i oppgave 6 finner vi at det elektriske feltet må peke mot høyre ($E(x) > 0$) både til høyre og til venstre for de to ladningene (dvs på "utsiden"), mens det må peke mot venstre ($E(x) < 0$) i området mellom de to ladningene. Bare graf nr 2 passer med dette.

---

9) To små kuler har masse 50 g hver. Kulene er festet i hver sin tynne (tilnærmet masseløse) isolerende tråd. Kulene har ladning henholdsvis 4 μC og -40 μC. I utgangspunktet "henger" kulene som vist i figuren til venstre, med innbyrdes avstand 20 cm. Den øverste kulas festepunkt A trekkes nå langsomt oppover mens den nederste kulas festepunkt B holdes fast. Når den nederste kula plutselig faller ned, er den øverste kula trukket en avstand h oppover. Hvor stor er h? (Figuren angir ikke nødvendigvis størrelsen på h korrekt i forhold til den opprinnelige avstanden på 20 cm.)



A 11 mm
B 13 cm
C 151 cm
D 6.7 m

———————

Den negativt ladete kula faller ned når den elektrostatiske tiltrekningskraften blir mindre enn tyngdekraften. Verdien av $h + 0.2$ (dvs h i meter) bestemmes derfor av ligningen

$$\frac{q_- \cdot q_+}{4\pi\varepsilon_0 (h+0.2)^2} = mg$$

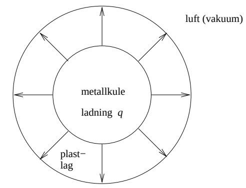
Vi løser ligningen med hensyn på h, setter inn oppgitte verdier og finner

$$h = \sqrt{\frac{q_- \cdot q_+}{4\pi\varepsilon_0 mg}} - 0.2 = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 40\cdot 10^{-6}\cdot 9\cdot 10^{9}}{0.050\cdot 9.8}} - 0.2 \simeq 1.51$$

---

10) En metallkule med (positiv) ladning q er belagt med et lag elektrisk nøytral plast. Pilene i figuren angir da feltlinjer for

A elektrisk forskyvning $\boldsymbol{D}$
B elektrisk felt $\boldsymbol{E}$
C polarisering $\boldsymbol{P}$
D både $\boldsymbol{D}$ og $\boldsymbol{E}$



Feltlinjene i figuren illustrerer et vektorfelt som er rettet radielt utover, og som bare er forskjellig fra null inne i plastlaget. Både inne i metallkula og utenfor plastlaget er feltet lik null (ingen feltlinjer). Både elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ og elektrisk forskyvning $\boldsymbol{D}$ er null inne i metallkula men forskjellig fra null overalt utenfor metallkula (dvs ikke bare inne i plastlaget). D er bestemt av fri ladning q på metallkula, $D(r) = q/4\pi r^2$ for $r > R$ (R = metallkulas radius). E er bestemt av total ladning, dvs både av fri ladning q på metallkula og indusert ladning $-q_i$ på indre overflate av plastlaget og q_i på ytre overflate av plastlaget. Dermed blir $E(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ utenfor plastlaget, men redusert med en faktor $1/\varepsilon_r$ inne i plastlaget. Her er ε_r plastens relative permittivitet. Feltlinjer for D ville dermed bli som i figuren, men ville ikke stoppe opp på plastlagets ytre overflate men fortsette videre i lufta på utsiden. Feltlinjer for E ville bli som i figuren, men i tillegg ville de inntegnede feltlinjene fortsette på utsiden, og dessuten ville nye feltlinjer starte på plastlagets ytre overflate. Polarisering $\boldsymbol{P}$ er, pr definisjon, elektrisk dipolmoment pr volumenhet. Det er bare inne i det dielektriske plastlaget at vi har elektriske dipoler, og dermed bare her vi har en P forskjellig fra null.

---

11) En parallellplatekondensator består av to tilnærmet uendelig store parallelle metallplater i innbyrdes avstand d. Med vakuum i hele rommet mellom platene er kapasitansen C_0. En dielektrisk skive med tykkelse $d/5$, permittivitet $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, og samme areal som de to opprinnelige metallplatene, settes inn mellom platene som vist i figuren. Da blir kondensatorens kapasitans C_1 lik

A $C_1 = 10C_0/9$
B $C_1 = 9C_0/10$
C $C_1 = C_0$
D $C_1 = 10C_0$

Det elektriske feltet fra (den fri) ladningen på kondensatorens to metallplater sørger for at elektriske dipoler inne i den dielektriske skiva rettes inn langs det elektriske feltet. Nettoeffekten av denne innrettingen av dipoler er at det induseres en viss overflateladning på hver side av skiva, f.eks. positiv ladning øverst og negativ ladning nederst dersom øverste metallplate har negativ ladning og nederste metallplate har positiv ladning. Inne i den dielektriske skiva reduseres dermed den elektriske feltstyrken med en faktor $1/\varepsilon_r$ i forhold til om vi hadde hatt vakuum der. Her er $\varepsilon_r = 2$ den relative permittiviteten til dielektrikumet. I vakuumlagene over og under skiva endres ikke feltet. Vi setter V_0 lik potensialforskjellen mellom metallplatene dersom vi har vakuum i hele rommet mellom platene. Det elektriske feltet er da $E_0 = V_0/d$ (konstant i hele rommet mellom platene). Potensialforskjellen V_1 mellom metallplatene *med* den dielektriske skiva på plass kan nå regnes ut:

$$V_1 = \frac{4}{5}E_0 d + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}E_0 d = \frac{9}{10}E_0 d = \frac{9}{10}V_0$$

Kapasitansen C_1 blir dermed

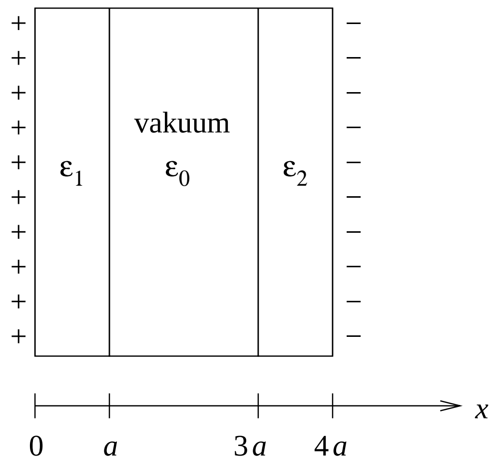
$$C_1 = \frac{Q}{V_1} = \frac{10Q}{9V_0} = \frac{10}{9}C_0$$

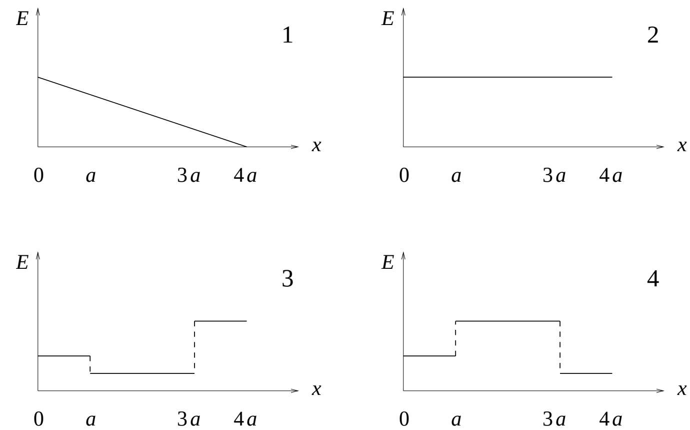
der $C_0 = Q/V_0$ er kapasitansen uten dielektrisk skive. Ladningen $\pm Q$ på de to metallplatene er den samme med eller uten dielektrisk skive i mellom.

---

12) To tilnærmet uendelig store metallplater har ladning $\pm\sigma$ pr flateenhet og er plassert i yz–planet, dvs i $x = 0$ (den positive), og i $x = 4a$ (den negative), som vist i figuren nedenfor til venstre. Rommet mellom platene er delvis fylt med to (elektrisk nøytrale) dielektriske lag, som vist i figuren til venstre. Det dielektriske laget i rommet $0 < x < a$ har permittivitet $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$. Det dielektriske laget i rommet $3a < x < 4a$ har permittivitet $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$. Hvilken av de fire grafene i figuren nedenfor til høyre illustrerer det elektriske feltet E som funksjon av avstanden x fra den positivt ladete metallplata?

A 1 B 2 C 3 **D** 4





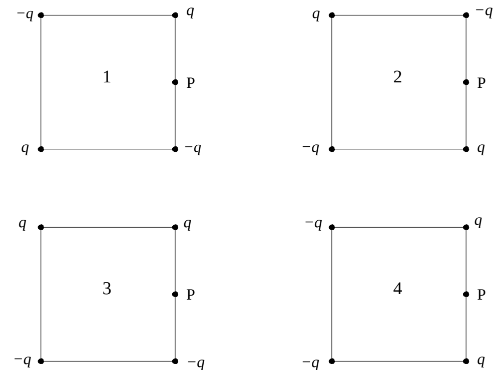
Dersom det elektriske feltet er E_0 mellom metallplatene før vi setter inn de to dielektriske lagene, blir feltstyrken redusert med en faktor $1/\varepsilon_{rj}$ inne i dielektrikum j ($j = 1, 2$). Her er ε_{rj} relativ permittivitet til dielektrikum j, dvs $\varepsilon_{r1} = 2$ og $\varepsilon_{r2} = 4$. Feltstyrken forblir uendret i vakuumlaget mellom $x = a$ og $x = 3a$. Dermed:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}E_0 \quad 0 < x < a \\
E &= E_0 \quad\;\; a < x < 3a \\
E &= \frac{1}{4}E_0 \quad 3a < x < 5a
\end{aligned}
$$

og graf nr 4 blir den riktige.

---

13) To positive og to negative punktladninger, alle fire like store i absoluttverdi (q), skal plasseres i hvert sitt hjørne av et kvadrat. På hvilken måte skal punktladningene plasseres for å oppnå størst mulig elektrisk feltstyrke midt på høyre sidekant, i punktet P?



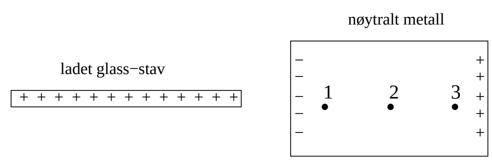
A 1
C 3
B 2
D 4

Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)

---

14) Du bringer en positivt og uniformt ladet glass-stav (isolator) nesten inntil et elektrisk nøytralt metall, som vist i figuren. Vi får da indusert overflateladning på det nøytrale metallet, som vist i figuren. Ranger potensialet V i de angitte punktene 1, 2 og 3 i metallet.

A $V_1 > V_2 > V_3$
B $V_1 = V_2 = V_3$
C $V_1 < V_2 < V_3$
D $V_1 = V_3 > V_3$

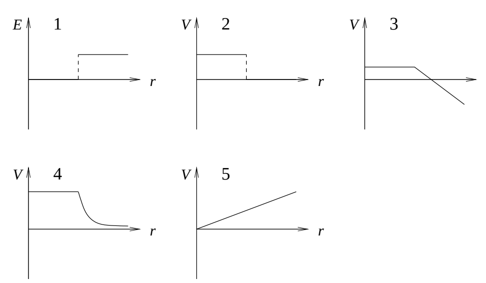


Inne i et metall (dvs elektrisk leder) er $E = 0$ i elektrostatisk likevekt. Null elektrisk felt betyr konstant elektrisk potensial V, ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Dermed: $V_1 = V_2 = V_3$.

---

15) Hvis det elektriske feltet E som funksjon av avstanden r fra en ladningsfordeling er som vist i graf nr 1, hvilken graf viser da det elektriske potensialet V som funksjon av avstanden r?

A 2
B 3
C 4
D 5



Sammenhengen $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ reduserer seg til

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

når V bare avhenger av avstanden r. Vi ser at ved å ta den deriverte av graf nr 3 og skifte fortegn, får vi nettopp grafen for E i nr 1.

---

16) To små metallkuler ligger i innbyrdes avstand 1 m. Den minste kula har ladning 5 μC og radius 1 cm. Den største kula har ladning -10 μC og radius 2 cm. Kulene forbindes med en tynn metalltråd som deretter fjernes etter en stund. Du kan anta at metalltråden hele tiden er elektrisk nøytral. Innbyrdes kraft mellom de to kulene er nå ca

A 50 mN og tiltrekkende
B 50 mN og frastøtende
C 50 μN og tiltrekkende
D 50 μN og frastøtende

Når de to metallkulene forbindes med en metalltråd, blir hele systemet et ekvipotensial, dvs det elektriske potensialet må være like stort på de to kulene. Potensialet på ei metallkule med ladning Q og radius R er

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Det betyr at den totale ladningen på -5 μC i likevekt må fordele seg på de to kulene slik at

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

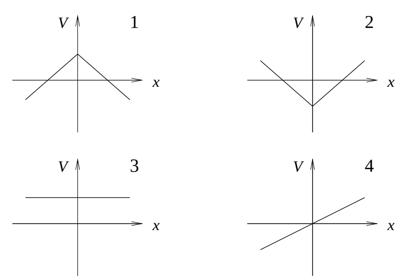
Her er $R_1 = 0.01$ m og $R_2 = 0.02$ m, slik at $Q_2 = 2Q_1$, dvs $Q_1 = -(5/3)$ μC og $Q_2 = -(10/3)$ μC. Kraften mellom kulene kan så bestemmes ved å betrakte de to små kulene som punktladninger i innbyrdes avstand $r = 1$ m:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{50}{9} \cdot 10^{-12} = 50 \cdot 10^{-3}$$

dvs 50 mN. Da begge kulene har negativ ladning, må F bli frastøtende.

---

17) Hvilken av grafene i figuren representerer potensialet V i nærheten av et uendelig stort uniformt og negativt ladet plan, plassert i yz-planet?



A 1
B 2
C 3
D 4

Et uendelig stort ladet plan med ladning σ pr flateenhet resulterer i et homogent elektrisk felt, $E = \sigma/2\varepsilon_0$, rettet inn mot planet på begge sider dersom $\sigma < 0$. Ettersom $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ og E er konstant, blir $V(x) = V(0) + \sigma|x|/2\varepsilon_0$ i en avstand $|x|$ fra planet (på planet, dvs i $x = 0$, er potensialet $V(0)$). Legg merke til at vi må sette på absoluttverditegn på x; vi må jo av symmetrigrunner ha samme potensial i posisjon x og $-x$. Fortegnet på ΔV må stemme med at $\boldsymbol{E}$ peker i retning fra høyt mot lavt potensial, evt. fra positiv ladning mot negativ ladning.

---

18) Potensialet på et uendelig stort positivt ladet plan er valgt lik $V = 0$. Planet har en uniform ladningstetthet 5 nC/m^2. I hvilken avstand fra planet er da $V = -100$ V?

A 0.65 mm B 2.3 cm **C** 0.35 m D 19 m

Potensialet fra et uendelig stort positivt ladet plan i $x = 0$ er

$$V(x) = V(0) - \frac{\sigma |x|}{2\varepsilon_0}$$

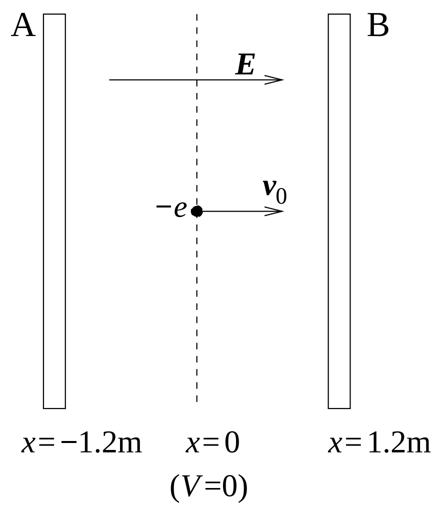
Her er $V(0) = 0$ og ladningen pr flateenhet $\sigma = 5 \cdot 10^{-9}$ C/m^2. Dermed blir $V = -100$ V i en avstand fra planet bestemt ved

$$-100 = -\frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot x \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{2}$$

dvs

$$x = 0.35 \text{ m}$$

(Felles tekst og figur til oppgavene 19-22) To tilnærmet uendelig store parallelle metallplater A og B er plassert i henholdsvis $x_A = -1.2$ m og $x_B = 1.2$ m som vist i figuren nedenfor. Et uniformt elektrisk felt mellom platene på 1.5 kV/m (i positiv x-retning) er generert av ladning på metallplatene. Vi velger $V = 0$ på midtplanet ved $x = 0$. Et elektron starter midt mellom platene, i $x = 0$, med hastighet $\boldsymbol{v}_0$ i positiv x-retning, tilsvarende en kinetisk energi $T_0 = 300$ eV. (1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J)



---

19) Hva er elektronets starthastighet v_0?

A 300 m/s B $7.5 \cdot 10^4$ m/s C $2.5 \cdot 10^6$ m/s **D** $1.0 \cdot 10^7$ m/s

---

$$T_0 = \frac{1}{2} m_e v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} = 1.0 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

20) Potensialforskjellen $\Delta V = V_A - V_B$ mellom platene er

A -3.6 kV B -0.63 kV C 0.63 kV **D** 3.6 kV

$\boldsymbol{E}$ er rettet fra plate A mot plate B, altså er potensialet V_A på plate A høyere enn potensialet V_B på plate B, som igjen betyr at $\Delta V = V_A - V_B > 0$. Dermed:

$$\Delta V = E \cdot d = 1500 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 2.4 \text{ m} = 3600 \text{ V}$$

---

21) Potensialet der elektronet snur har verdien

A -900 V **B** -300 V C 300 V D 900 V

Total energi til elektronet er summen av kinetisk energi T og potensiell energi U. Null potensial, og dermed også nullpunkt for potensiell energi U, er valgt i $x = 0$, slik at total energi er lik $T_0 = 300$ eV. Der elektronet snur må vi ha null hastighet, dvs kinetisk energi $T_s = 0$. Følgelig er den potensielle energien $U_s = 300$ eV der elektronet snur, og potensialet

$$V_s = \frac{U_s}{(-e)} = -300 \text{ V}$$

---

22) Idet elektronet treffer plate A har det en kinetisk energi lik

A 2.1 keV B 1.5 keV C 0.6 keV D -0.3 keV

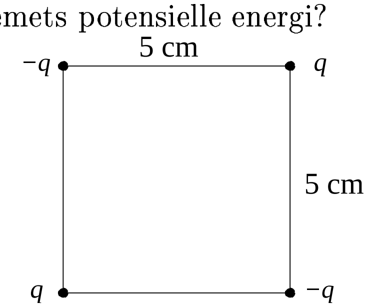
Potensialet på plate A er $V_A = 1800$ V. Dermed er potensiell energi til elektronet idet det treffer plate A lik $U_A = -eV_A = -1800$ eV. Da elektronets totale energi er 300 eV, blir kinetisk energi idet det treffer plate A

$$T_A = 300 \text{ eV} - U_A = 2100 \text{ eV}$$

---

23) Fire punktladninger, to positive og to negative ($q = 9\ \mu$C), er plassert i hjørnene på et kvadrat med sidekanter 5 cm, som vist i figuren. Hva er systemets potensielle energi?

A 19 J
B Null
C -7 J
D -38 J



Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

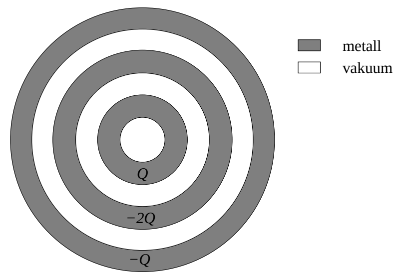
der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9 \cdot 10^9 \cdot (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50} \cdot 10^{-2}} \right] \simeq -38 \text{ J}$$

---

24) Figuren viser tre hule konsentriske metallkuler med netto ladning Q (på innerste kule), $-2Q$ (på midterste kule) og $-Q$ (på ytterste kule). Alle de tre kuleskallene har en viss tykkelse. Hvor mye ladning er samlet på *ytre* overflate av den *midterste* kula?

A $-Q$
B $-2Q$
C Q
D 0

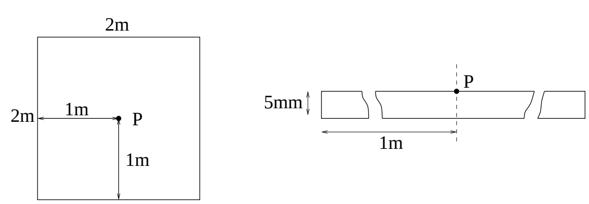


Her kan vi bruke Gauss' lov. Vi velger en gaussflate som i sin helhet ligger inne i den midterste kula. Ettersom vi da er inne i en leder, er $E = 0$ overalt på gaussflaten, og dermed $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$. Ifølge Gauss' lov er da netto ladning innenfor denne gaussflaten lik null. Vi kan legge gaussflaten så nært inntil den innerste overflaten av midterste kule som vi vil. Siden ladningen på innerste kule er Q, må da ladningen på innerste overflate av midterste kule være $-Q$. Midterste kule har total ladning $-2Q$. Inne i kula kan vi ikke ha noen netto ladning (dette viste vi ved å bruke Gauss' lov i forelesningene). Dermed må den resterende ladning på $-Q$ ligge på ytre overflate av den midterste kula.

---

25) En kvadratisk plate har areal 4 m^2 og tykkelse 5 mm. En ladning $8 \cdot 10^{-11}$ C er uniformt fordelt over platas volum. Hva blir den elektriske feltstyrken i punktet P på platas senterakse, på platas overflate? (Tips: Bruk Gauss' lov.)

A 1.13 V/m
B 8.27 V/m
C 143 V/m
D 9.3 kV/m



Ladning pr volumenhet inne i plata er

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{8 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot 0.005} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$$

For å finne den elektriske feltstyrken i punktet P bruker vi nå Gauss' lov på en tynn "søyle" med samme høyde h som platas tykkelse (5 mm), f.eks. en sylinder med akse sammenfallende med platas senterakse. Topp og bunn av gauss-sylinderen har et lite (infinitesimalt) areal dA. Både på topp og bunn er $\boldsymbol{E}$ parallell med $d\boldsymbol{A}$, og i absoluttverdi nettopp lik E_P, feltstyrken i punktet P. Bidraget til flateintegralet på venstre side i Gauss' lov fra topp og bunn av gauss-sylinderen blir derfor

$$2 \cdot E_P \cdot dA$$

Bidraget fra resten av gauss-sylinderen ("dorullen") blir neglisjerbart i forhold til dette når platas tykkelse (0.005 m) er mye mindre enn dens "horisontale lineære" utstrekning ($\sim$ 1 m). Høyre side av Gauss' lov blir

$$\frac{1}{\varepsilon_0} dQ = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho h \, dA$$

der $dQ = \rho h \, dA$ er total ladning inne i gauss-sylinderen med grunnflate dA og høyde h. Dermed:

$$E_P = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} = 2\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 0.005 = 1.13 \text{ V/m}$$

Kommentar: Så lenge skiva har en endelig tykkelse h (dvs: ikke null tykkelse), blir bidraget fra "dorullen" ikke eksakt lik null. Uansett hvor liten radius vi velger på gauss-sylinderen, vil ikke $\boldsymbol{E}$ ha eksakt null komponent normalt på dorullflaten, dvs parallelt med $d\boldsymbol{A}$ på denne flaten. Dermed *får* vi et bidrag fra denne flaten til integralet på venstre side i Gauss' lov, slik at den beregnede verdien for E_P ikke er helt eksakt. Korreksjonen blir imidlertid liten, nærmere bestemt en "orden" $(h/R) \sim 0.005$ mindre enn det tilnærmede resultatet funnet over, med $h = 0.005$ m og $R \sim 1$ m (horisontal lineær utstrekning). Vi ser at uttrykket funnet for E_P kan skrives på den velkjente formen

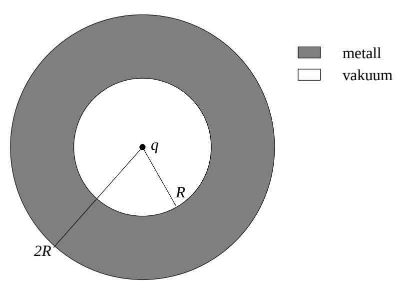
$$E_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

der $\sigma = \rho h = Qh/V = Qh/hA = Q/A$ er platas ladning pr flateenhet. Med andre ord: Elektrisk felt fra uendelig stort ladet plan, som med god tilnærmelse er nettopp hva vi har her!

---

26) Ei hul metallkule med ladning -9.42 mC har indre radius $R = 5$ cm og ytre radius $2R$. I sentrum, midt i hulrommet, er det plassert en punktladning $q = 3.14$ mC. Hva blir da ladningen pr flateenhet, i enheten mC/m^2, på metallkulas ytre overflate?

A -75
B -50
C 0
D 25



Med utgangspunkt i oppgave 24 finner vi at den totale ladningen på metallkula må fordele seg slik at $-q = -3.14$ mC blir liggende på indre overflate (ved $r = R$) og de resterende -6.28 mC på ytre overflate (ved $r = 2R$). Ladningen pr flateenhet på ytre overflate blir dermed

$$\sigma = -\frac{6.28}{4\pi(2R)^2} \simeq -\frac{2\pi}{16\pi R^2} = -\frac{1}{8 \cdot 0.05^2} = -50$$

dvs i enheten mC/m^2.

---

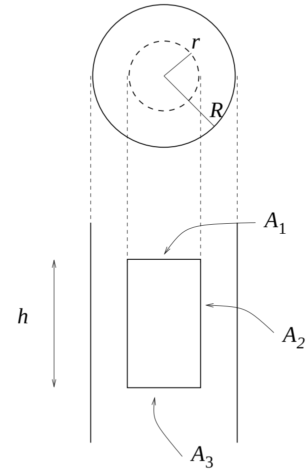
27) Vi betrakter en uendelig lang, rett sylinder med radius R og konstant ladning ρ pr volumenhet. Dersom vi skal bruke Gauss' lov til å bestemme det elektriske feltet $E(r)$ i en avstand $r < R$ fra sylinderens akse, vil utregningen f.eks. starte slik:

$$\oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho\, h\, 2\pi r'\, dr' \tag{1}$$

$$\oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_{A_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} + \oint_{A_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} + \oint_{A_3} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} \tag{2}$$

$$= \oint_{A_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} \tag{3}$$

Her kunne vi gå fra ligning (2) til ligning (3) fordi

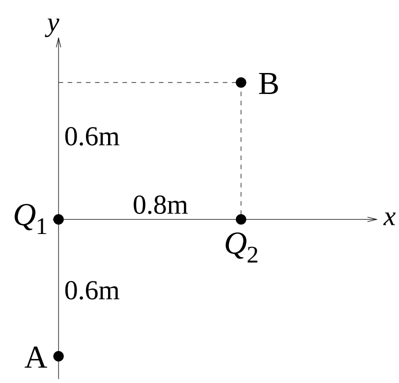


A $E = 0$ på A_1 og A_3.
B det ikke er noe ladning på A_1 og A_3.
C integralene over A_1 og A_3 bidrar med motsatt fortegn og dermed kansellerer.
D $\boldsymbol{E}$ står vinkelrett på $d\boldsymbol{A}$ på A_1 og A_3.

Av symmetrigrunner må $\boldsymbol{E}$ overalt være rettet radielt, dvs vinkelrett på sylinderens akse. På gaussflatens topplokk A_1 og bunn A_3 er flatenormalen $d\boldsymbol{A}$ parallell med sylinderens akse, og altså normal til $\boldsymbol{E}$.

---

28) To punktladninger $Q_1 = 69$ nC og $Q_2 = -98$ nC er plassert i xy-planet, som vist i figuren. Et elektron flyttes fra punkt A til punkt B. Hvor stor endring gir denne forflytningen i systemets potensielle energi? ("Systemet" = de to punktladningene og elektronet.) (1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J)



A -1 keV
B -1 eV
C 1 eV
D 1 keV

Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og

Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

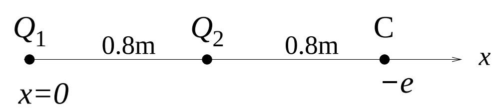
og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

---

29) To punktladninger $Q_1 = 58$ nC og $Q_2 = -90$ nC er plassert på x-aksen, som vist i figuren. Et elektron slippes med null starthastighet i punktet C. Hvor stor er elektronets hastighet når det har kommet langt ut på x-aksen ($x \to \infty$)?

A $3.2 \cdot 10^3$ m/s
B $1.5 \cdot 10^5$ m/s
C $1.6 \cdot 10^7$ m/s
D $1.1 \cdot 10^8$ m/s



———————

Her må vi bruke prinsippet om energibevarelse for å finne elektronets "slutthastighet": Elektronet har kinetisk energi $T_C = 0$ og potensiell energi U_C i punktet C, dvs total energi U_C. Uendelig langt ute på x-aksen er potensialet fra de to punktladningene Q_1 og Q_2 lik null, og dermed også elektronets potensielle energi $U_\infty = 0$. Energibevarelse gir da $T_\infty = U_C$, så vi må bestemme elektronets potensielle energi i punktet C:

$$\begin{aligned} U_C &= -eV_C = -e\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.8}\right] \\ &= -1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{1.6} \cdot (Q_1 + 2Q_2) \\ &= -9 \cdot 10^{-10} \cdot (58 - 180) \cdot 10^{-9} = +1.1 \cdot 10^{-16} \end{aligned}$$

dvs i enheten J. Slutthastigheten blir da

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2U_C}{m_e}} = \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^{-16}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} \simeq 1.6 \cdot 10^7$$

dvs i enheten m/s.

---

30) En kube med sidekanter 100 nm inneholder 10^7 molekyler. Hvert molekyl kan oppfattes som en elektrisk dipol med punktladninger $\pm 0.1e$ i innbyrdes avstand 0.2 nm. Hva blir øvre teoretiske grense for elektrisk polarisering P i dette mediet, i enheten $\mathrm{C/m^2}$?

A $47 \cdot 10^{-9}$ B $11 \cdot 10^{-6}$ **C** 0.032 D 52

Elektrisk polarisering P er pr definisjon elektrisk dipolmoment pr volumenhet, så vi må finne maksimalt totalt elektrisk dipolmoment for de 10^7 molekylene, samt kubens volum. Kubens volum er:

$$V = (100 \cdot 10^{-9})^3 = 10^{-21}\ \mathrm{m}^3$$

Elektrisk dipolmoment for ett molekyl er:

$$p_0 = q_0 d = 0.1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.2 \cdot 10^{-9} = 3.2 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Cm}$$

Maksimal teoretisk polarisering, dvs med alle molekylære dipolmoment i samme retning, blir

$$P_{\max} = \frac{Np_0}{V} = \frac{10^7 \cdot 3.2 \cdot 10^{-30}}{10^{-21}} = 0.032\ \mathrm{C/m^2}$$

---

31) I et område er det elektriske feltet konstant lik 100 V/m og rettet langs den positive x-aksen. Hvis potensialet i $x = 4$ cm på x-aksen er 6 V, hva er da potensialet i $x = 16$ cm?

A -18 V **B** -6 V C 2 V D 12 V

Avstanden mellom de to punktene er 12 cm = 0.12 m. Med en elektrisk feltstyrke på 100 V/m må derfor potensialforskjellen mellom de to punktene være $100 \cdot 0.12 = 12$ V. Uten å tenke på fortegn i første omgang kan vi derfor konkludere med at potensialet i posisjon $x = 16$ cm må være enten $+18$ V eller -6 V, ettersom potensialet er $+6$ V i posisjon $x = 4$ cm. Ettersom $+18$ ikke er et alternativ, velger vi -6 V, dvs alternativ B.
Vi kan selvsagt overbevise oss selv om at fortegnet stemmer: Det elektriske feltet er rettet langs positiv x-akse. Elektrisk felt har retning fra høyt mot lavere elektrisk potensial. Derfor må potensialet i $x = 16$ cm være mindre enn i $x = 4$ cm.
Alternativt kan vi jo nå bruke dette resultatet til å *minne* oss om sammenhengen mellom E-feltets retning og retningen på avtagende og stigende potensial. Sånn sett kunne denne oppgaven brukes til å få korrekt fortegn på diverse andre oppgaver (f.eks. 17, 20, 21 og 28).

---

32) To metallkuler A og B har radius henholdsvis $r_A = a$ og $r_B = 3a$ og i utgangspunktet netto ladning Q_0 (på den minste kula) og $11Q_0$ (på den største kula). Kulene bringes så i berøring med hverandre før de separeres og fjernes langt fra hverandre. Det elektriske feltet på overflaten til kule A er nå E_0. Hva er da det elektriske feltet på overflaten til kule B?

A $E_0/3$ B E_0 C $2E_0$ D $3E_0$

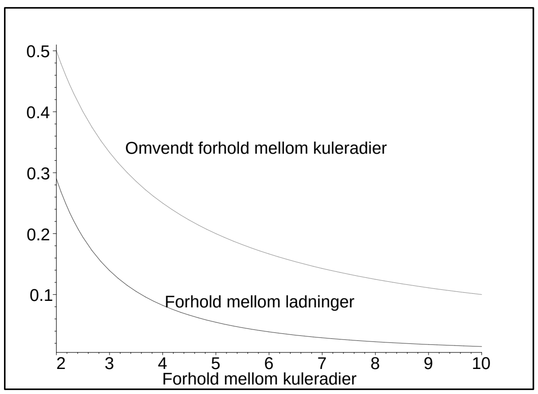
Ingen av de oppgitte alternativene er riktige. Ladningen vil fordele seg slik at

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{3\ln 2 + \pi/2}{3\ln 2 - \pi/2}$$

Dermed blir det elektriske feltet på overflaten til kule B lik

$$E_B = E_A \frac{r_A^2 \, Q_B}{r_B^2 \, Q_A} = E_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3\ln 2 + \pi/2}{3\ln 2 - \pi/2} \simeq 0.8 E_0$$

Dersom kulene hele tiden hadde vært langt fra hverandre og blitt "lagt på" samme potensial ved å forbinde dem med en lang, tynn metalltråd (som i oppgave 16), ville vi hatt $Q_B/Q_A = 3$, og dermed $E_B = E_0/3$.
De to kurvene i figuren nedenfor viser, som funksjon av forholdet mellom de to kulenes radier (i vårt tilfelle 3), henholdsvis hvordan forholdet mellom ladningene på de to kulene blir (nederste kurve) og det inverse forholdet mellom kulenes radier (øverste kurve), som ville ha representert ladningsforholdet dersom kulene hadde blitt forbundet med en lang, tynn leder.



---

33) Kapasitansen til en kondensator avhenger av

A ladningen på kondensatoren.
B potensialforskjellen over kondensatoren.
C både ladningen på og potensialforskjellen over kondensatoren.
D verken ladningen på eller potensialforskjellen over kondensatoren.

Kapasitansen til en kondensator er definert ved

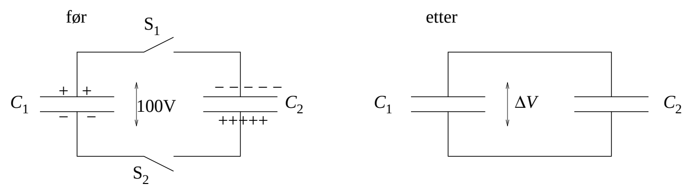
$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

der ΔV er potensialforskjellen mellom kondensatorens to ledere med ladning henholdsvis Q og $-Q$. Den elektriske feltstyrken E i området mellom de to lederne er proporsjonal med Q (Coulombs lov). Men da er også ΔV proporsjonal med Q, ettersom potensialforskjellen mellom de to lederne bestemmes ved å integrere det elektriske feltet langs en (vilkårlig) vei mellom de to lederne. Dermed blir forholdet mellom Q og ΔV en størrelse som avhenger verken av Q eller ΔV. Kapasitansen er rett og slett en geometrisk faktor, avhengig av størrelse og relativ plassering av de to lederne og dessuten hva slags medium vi har i området mellom de to lederne.

---

34) To kondensatorer er begge ladet opp med et 100 volts batteri, som vist i figuren til venstre. Merk at kondensatoren til venstre, med kapasitans $C_1 = 2\ \mu$F, har den positivt ladete platen øverst, mens den til høyre, med kapasitans $C_2 = 5\ \mu$F, har den negativt ladete platen øverst (før de to bryterne lukkes). Hva blir potensialforskjellen ΔV over de to kondensatorene etter at vi forbinder dem ved å lukke bryterne S_1 og S_2 (se figuren til høyre)?

A 43 V   B 70 V   C 100 V   D 115 V



Før bryterne lukkes er ladningen på de to kondensatorene henholdsvis

$$Q_1 = C_1 \Delta V_0 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V_0 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

Dermed er total ladning øverst

$$Q_o = (+2 - 5) \cdot 10^{-4} = -3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

og nederst

$$Q_n = (-2 + 5) \cdot 10^{-4} = +3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

Etter at bryterne lukkes må vi få samme potensial på øverste plate på begge kondensatorer, og samme potensial på nederste plate på begge kondensatorer. Det betyr at ladningene Q_o og Q_n må omfordele seg inntil

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

Her er $\pm q_1$ ladningen på kondensator 1 og $\pm q_2$ ladningen på kondensator 2. Vi må selvsagt ha

$$q_1 + q_2 = Q_n = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

og altså

$$q_2 = q_1 \frac{C_2}{C_1} = \frac{5}{2} q_1$$

Løsningen av disse to ligningene er

$$q_1 = \frac{6}{7} \cdot 10^{-4} \quad ; \quad q_2 = \frac{15}{7} \cdot 10^{-4}$$

begge i enhet C. Dette tilsvarer en potensialforskjell

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = 42.8 \simeq 43\ \text{V}$$

Kommentar: Dersom de to kondensatorene i utgangspunktet hadde hatt likt fortegn på samme side (øverst, nederst), og samme potensialforskjell mellom platene, ville selvsagt ingenting ha endret seg når de to bryterne lukkes. Her var imidlertid øvre plate ladet med motsatt fortegn, positiv på kondensator 1 og negativ på kondensator 2, og da vil ladning forflytte seg etter sammenkobling inntil de to lederne (oppe og nede) representerer hvert sitt ekvipotensial.
Nå lurer du kanskje på hvor det ble av energien som opprinnelig var lagret i de to kondensatorene? Vi har vist i forelesningene at lagret potensiell energi i en kondensator med kapasitans C og potensialforskjell ΔV mellom lederne er

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Det betyr at total lagret energi i utgangspunktet var

$$U_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)(\Delta V_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 35 \text{ mJ}$$

mens den etter sammenkobling bare er

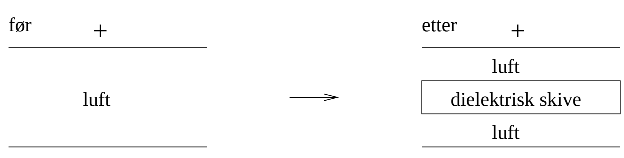
$$U = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 42.8^2 \simeq 6 \text{ mJ}$$

Tapet i potensiell energi på ca 29 mJ har stort sett gått over til varme i ledningene mellom kondensatorplatene. Slike ledninger har jo alltid en viss resistans, og ved forflytning av ladning fra en plate til den andre må det i et visst tidsrom gå en elektrisk strøm, noe som fører til et effekttap ($P = VI = RI^2$ når en strøm I passerer gjennom en ohmsk motstand R). I tillegg må ladninger ha blitt akselerert i denne prosessen, for de startet jo i ro og endte opp i ro et annet sted. Akselererte ladninger mister energi i form av elektromagnetisk stråling. (Stråling er ikke pensum i dette kurset.)

---

35) En parallellplatekondensatorer har ladning Q og $-Q$ på henholdsvis øvre og nedre metallplate. Kondensatoren er i utgangspunktet fylt med luft, men så skyves en dielektrisk skive (med samme areal som metallplatene) inn mellom platene, som vist i figuren. Hvilken av følgende påstander er da *ikke* riktig?

A Potensialforskjellen mellom metallplatene reduseres.
B Kondensatorens kapasitans blir større.
C Potensiell energi lagret i kondensatoren forblir uendret.
D Den elektriske feltstyrken i luftlagene forblir uendret.

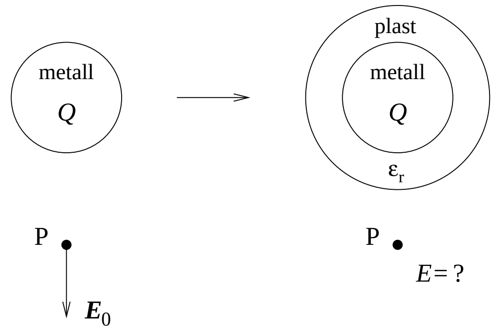


Kapasitansen til kondensatoren blir større dersom vi setter en dielektrisk skive inn mellom kondensatorplatene, se oppgave 11. (Dvs påstand B er korrekt.) Kondensatorplatenes ladning Q endres ikke, så potensialforskjellen $\Delta V = Q/C$ må bli mindre. (Dvs påstand A er korrekt.) Den elektriske feltstyrken i luftlagene påvirkes ikke av at vi setter inn en dielektrisk skive. (Dvs påstand D er korrekt.) Den elektriske feltstyrken inne i den dielektriske skiva reduseres i forhold til om vi hadde vakuum der. Dermed blir energitettheten (energi pr volumenhet) $u = \varepsilon_0 E^2/2$ redusert inne i skiva slik at total potensiell energi lagret i kondensatoren blir mindre. (Dvs påstand C er uriktig.)

---

36) Det elektriske feltet fra ei metallkule med ladning Q er i et punkt P (utenfor kula) lik E_0. Dersom metallkula dekkes med et jevntykt lag med plast (dvs dielektrikum med $\varepsilon_r > 1$), som vist i figuren til høyre, blir den elektriske feltstyrken i punktet P lik

A E_0/ε_r **B** E_0 C $\varepsilon_r E_0$ D null



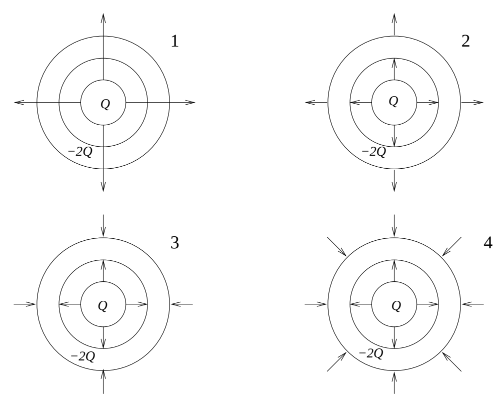
———————

Det elektriske feltet endres bare inne i plastlaget (i forhold til om plastlaget ikke var til stede), ikke i området utenfor. Se også oppgave 10.

---

37) Figuren viser en metallkule med netto ladning Q omgitt av et luftlag, etterfulgt av et metallisk kuleskall med netto ladning $-2Q$. Hvilken figur angir da korrekt feltlinjer for $\boldsymbol{E}$?

A 1
B 2
C 3
D 4



———————

Ladningen $-2Q$ på kuleskallet må fordele seg med $-Q$ på både indre og ytre overflate. (Se oppgave 24 og 26.) Da kan vi bruke Gauss' lov og finne at den elektriske feltstyrken er

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

både i området mellom indre kule og kuleskallet og på utsiden av kuleskallet. Mellom de to lederne er feltet rettet radielt utover, på utsiden av kuleskallet er det rettet radielt innover. Overalt inne i de to lederne må vi ha $E = 0$.
Ser vi nå på to kuleflater, begge konsentriske med de to lederne, den ene beliggende i luftlaget mellom de to lederne og den andre beliggende utenfor kuleskallet, så må en like stor elektrisk fluks,

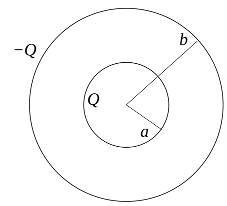
$$\phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

passere gjennom begge disse kuleflatene. (I absoluttverdi: Positiv fluks gjennom innerste kuleflate, dvs utover, negativ fluks gjennom ytterste kuleflate, dvs innover.) Vi "definerte" elektriske flukslinjer slik at $|E|$ overalt skulle tilsvare antall feltlinjer pr flateenhet. Følgelig tilsvarer antall feltlinjer den elektriske fluksen som passerer gjennom en flate. Og derfor må figur 3 være den riktige: Fire feltlinjer gjennom begge de to valgte kuleflatene.
Alternativt kan vi si at like mange feltlinjer må ende opp på ladningen $-Q$ på metallskallets indre overflate som på ladningen $-Q$ på metallskallets ytre overflate.
Figur 1 ville ha vært riktig dersom metallskallet ikke hadde vært til stede. Figur 2 ville ha vært riktig dersom metallskallet hadde hatt null netto ladning (og dermed indusert ladning $-Q$ på indre flate og Q på ytre flate). Figur 4 ville ha vært riktig dersom metallskallet hadde hatt netto ladning $-3Q$ (og dermed indusert ladning $-Q$ på indre flate og $-2Q$ på ytre flate).

---

38) To konsentriske (tynne) metalliske kuleskall har radius henholdsvis a og b ($b > a$), og ladning henholdsvis Q og $-Q$. Hva blir kapasitansen til en slik kondensator?

A $4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)$
B $\pi\varepsilon_0(b-a)$
C $4\pi\varepsilon_0 a^2/(b-a)$
D $4\pi\varepsilon_0(b-a)^3/3ab$



Ettersom kapasitansen C pr definisjon er gitt ved forholdet mellom ladningen Q på kondensatoren og potensialforskjellen ΔV mellom kondensatorens to ledere, må vi regne ut ΔV mellom de to kuleskallene. Det elektriske feltet mellom de to kuleskallene er

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

som bestemmes ved hjelp av Gauss' lov. (Etterhvert bør en vel nesten klare å huske at elektrisk felt fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling er gitt ved ladningen "innenfor" der vi er, og som om denne ladningen var samlet i sentrum - på samme måte som gravitasjonsfeltet fra en symmetrisk massefordeling, f.eks. jorda.)
Da kan vi bruke sammenhengen

$$\Delta V = V(a) - V(b) = -\int_b^a E(r)\, dr$$

til å bestemme potensialforskjellen ΔV. (Vi integrerer langs en radielt rettet kurve slik at $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = E(r)\, dr(\hat{r}\cdot\hat{r}) = E(r)\, dr$.) Vi får

$$\Delta V = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

som gir en kapasitans

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

Kommentar: Hvis vi her lar avstanden $d = b - a$ mellom kuleskallene bli veldig liten i forhold til a og b, kan vi skrive

$$\frac{ab}{b-a} = \frac{ab}{d} \simeq \frac{a^2}{d}$$

slik at

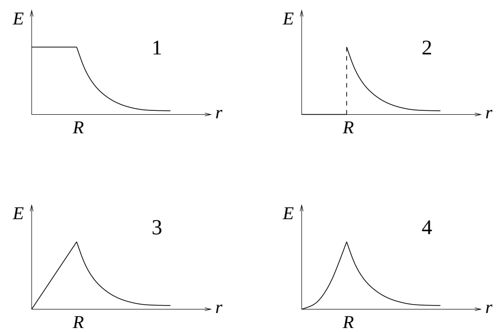
$$C \simeq \varepsilon_0 \frac{4\pi a^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

der $A = 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2$ er arealet av hver av kuleskallene. Dvs samme resultat som for en parallellplatekondensator.

---

39) Ei kule med radius R har uniform ladning ρ pr volumenhet. Fastslå, ved hjelp av Gauss' lov, hvilken graf i figuren til høyre som representerer den resulterende elektriske feltstyrken E som funksjon av r.

A 1
B 2
C 3
D 4



Alle kurvene har samme form på utsiden av kula ($r > R$). Vi må finne ut hvordan $E(r)$ avhenger av r når vi er inne i kula ($r < R$). Vi velger en kuleflate med radius $r < R$ som gaussflate og får på venstre side av Gauss' lov:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Dette skal være lik netto ladning innenfor gaussflaten, dividert med ε_0. Ladning innenfor kuleskallet med radius $r < R$ er:

$$Q(r) = \int_{r'<r} \rho \, dV = \rho \int_{r'<r} dV = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$$

Dermed:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \sim r$$

Dvs: Feltstyrken vokser lineært med avstanden r fra kulas sentrum (så lenge vi er inne i kula). Altså er graf 3 den riktige.
Legg merke til at med litt trening er det ikke nødvendig å regne ut detaljene her. Vi trenger bare å innse at integralet på venstre side gir en faktor r^2 pga flateintegralet over gaussflaten med areal $4\pi r^2 \sim r^2$, og at ladningen på høyre side av Gauss' lov gir en faktor r^3 ettersom ladningstettheten her er konstant og $Q(r)$ blir proporsjonal med volumet $V(r) = 4\pi r^3/3 \sim r^3$. Alt i alt, altså, $E(r) \sim r^{3-2} = r$. Hadde f.eks. ladningstettheten vært proporsjonal med r, ville dette ha gitt en faktor r^4 på høyre side av Gauss' lov, og følgelig $E(r) \sim r^2$. Etc etc!

---

40) Det elektriske feltet på symmetriaksen og i avstand x fra sentrum av en jevnt ladet sirkulær skive med ladning Q og radius R er

A $$\frac{Q\left(1 - x/\sqrt{x^2+R^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

B $$\frac{Q\left(1 - R/\sqrt{x^2+R^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

C $$\frac{Q\left(1 + R/\sqrt{x^2+R^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

D $$\frac{Q\left(1 + x/\sqrt{x^2+R^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Her håpet jeg på at du istedetfor å begynne å regne ut feltet fra en slik skive ville se om de oppgitte alternativene stemmer med det du vet om feltet fra en slik ladning i visse såkalte "asymptotiske" grenser. For eksempel må feltet fra en viss mengde lokalisert ladning Q på riktig stor avstand x redusere seg til feltet fra en punktladning Q i avstand x, dvs

$$E(x) \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

når $x \gg R$. Her ville dette ha holdt i massevis, for ingen av uttrykkene i B, C eller D går mot null i denne grensen! (Uttrykket i D har dessuten ikke riktig dimensjon.) Vi kunne også ha sett på feltet i motsatt grense, dvs $x \to 0$. Da bør vi jo få det samme som for et uendelig stort plan, dvs $\sigma/2\varepsilon_0$. Bare feltet i A stemmer med dette:

$$E_A \to \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

med $\sigma = Q/\pi R^2$, dvs ladning pr flateenhet.

Svartabell:

Oppgave	A	B	C	D
1		B		
2			C	
3				D
4			C	
5	A			
6		B		
7			C	
8		B		
9			C	
10			C	
11	A			
12				D
13			C	
14		B		
15		B		
16		B		
17		B		
18			C	
19				D
20				D
21		B		
22	A			
23				D
24	A			
25	A			
26		B		
27				D
28				D
29			C	
30			C	
31		B		
32	A	B	C	D
33				D
34	A			
35			C	
36		B		
37			C	
38	A			
39			C	
40	A			