**Institutt for fysikk, NTNU**
**FY1003 Elektrisitet og magnetisme**
**TFY4155 Elektromagnetisme**
**Vår 2005**

# Midtsemesterprøve fredag 11. mars kl 1030 – 1330.

Løsningsforslag

1) B. Newtons 3. lov: Kraft = motkraft. (Andel som svarte riktig: 93%)

2) D. De to ladningene i hjørnene til høyre bidrar begge med en kraft $q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2$ med retning nedover. De to ladningene i hjørnene til venstre bidrar begge med vertikalkomponent rettet oppover, mens horisontalkomponentene kansellerer. I absoluttverdi er hver av kreftene $2q^2/4\pi\varepsilon_0 5a^2$ ettersom avstanden nå er $\sqrt{5}a$. Forholdet mellom vertikalkomponenten og absoluttverdien er det samme som $a/\sqrt{5}a$, slik at hver av ladningene i hjørnene til venstre gir vertikalkomponent oppover lik $q^2/10\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2$. Vi ser at komponentene med retning nedover er størst. (88%)

3) A. Basert på forrige oppgave ser vi at vi må ha

$$\frac{\alpha q^2}{4\pi\varepsilon_0 5a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

for at hver av ladningene til venstre skal gi like stor vertikalkomponent rettet oppover som det hver av ladningene til høyre gir for vertikalkomponent rettet nedover. Løser vi dette, finner vi $\alpha = 5\sqrt{5}$. (34%)

4) D. Elektrisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{p}$ har potensiell energi $U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_0$ i elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$. Dermed minimal $U$ når $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{E}_0$. (74%)

5) B. Elektrisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{p}$ blir utsatt for dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_0$ i elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$. Dermed maksimalt dreiemoment når $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{E}_0$. (74%)

6) D. Den elektriske feltstyrken fra ladningen $Q$ avtar med avstanden. Dipolen begynner å rotere med klokka slik at den negative enden kommer nærmere og den positive lenger unna $Q$. Dermed blir den tiltrekkende kraften på den negative enden større enn den frastøtende kraften på den positive enden av dipolen. Følgelig netto tiltrekning. (73%)

7) B. I motsetning til forrige oppgave er nå kreftene hele tiden like store på de to endene av dipolen, men motsatt rettet. Følgelig null nettokraft, og kun rotasjon med klokka, ingen translasjon. (84%)

8) D. Et konservativt elektrostatisk felt må oppfylle $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$, dvs linjeintegralet av $\boldsymbol{E}$ rundt en lukket kurve må være lik null. Den kvadratiske kurven som er gitt i oppgaven er enkel å integrere

de oppgitte elektriske feltene langs. Bare feltet i D gjør integralet forskjellig fra null:

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= \oint E_0\frac{y}{a}\hat{x}\cdot d\boldsymbol{l}\\ &= 0+0\int_a^0 E_0\frac{y}{a}dx+0\\ &= -E_0 a \neq 0\end{aligned}$$

Forklaring på de tre nullene: Fra origo, $(x, y) = (0, 0)$, til $(a, 0)$ er $y = 0$ og dermed $\boldsymbol{E} = 0$. Fra $(a, 0)$ til $(a, a)$ er $\boldsymbol{E} \perp d\boldsymbol{l}$ og dermed $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$. Fra $(0, a)$ til $(0, 0)$ er også $\boldsymbol{E} \perp d\boldsymbol{l}$. (40%)

9) A. Vi har $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, dvs at den elektriske feltstyrken er gitt ved (den negative) gradienten til potensialet. Det betyr at feltstyrken er størst der potensialet endrer seg raskest, og det gjør det der ekvipotensialkurvene ligger tettest. Følgelig størst feltstyrke i punkt 1. (73%)

10) B. Det kan ikke være noe (netto) ladning i et område hvor vi har et uniformt elektrisk felt. Eventuelt: Null netto fluks gjennom alle de fire lukkede flatene, og dermed null netto ladning innenfor dem, ifølge Gauss' lov. (83%)

11) C. Kjernen i et hydrogenatom, med ladning $+e$, omgir seg med et potensial $V(r) = e/4\pi\varepsilon_0 r$. Dermed blir den potensielle energien til et elektron i dette potensialet $U(r) = V(r)\cdot q = V(r)\cdot(-e) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$. (65%)

12) B. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, har vi her

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} = -kV_0\cos kx\hat{x}$$

(90%)

13) A. Her er det vel enklest å sjekke hvilken $V$ som gir det oppgitte elektriske feltet. Vi tar gradienten til potensialet i A:

$$\begin{aligned}-\nabla V &= -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}\\ &= E_0\hat{x} - E_0 a\frac{\partial}{\partial y}(\ln y_0 - \ln y)\hat{y}\\ &= E_0\hat{x} + E_0\frac{a}{y}\hat{y}\end{aligned}$$

Vi har her brukt at $\ln(y_0/y) = \ln y_0 - \ln y$. (41%)

14) A. Det er ikke riktig at den elektriske feltstyrken må være null på overflaten av en elektrisk leder. (Men på overflaten må feltet stå vinkelrett på overflaten. Og *inni* lederen må selvsagt feltet være null.) (72%)

15) A. Ettersom $\Delta V = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$, må potensialet *avta* når vi forflytter oss *langs* $\boldsymbol{E}$, dvs *med* feltlinjene. Følgelig er $V_4 > V_3 > V_1$. Dessuten er $V_1 = V_2$ fordi punktene 1 og 2 er på samme elektriske leder, og en elektrisk leder er et ekvipotensial. (51%)

16) C. Ballongen får netto ladning ved gnidning og omgir seg dermed med et (ikke-uniformt) elektrisk felt. Dette feltet polariserer den nærmeste delen av taket slik at en viss mengde ladning med motsatt fortegn av ballongens ladning kommer nærmere ballongen og en tilsvarende mengde ladning med samme fortegn som ballongens ladning kommer lenger unna ballongen. Resultatet blir netto tiltrekning, jfr oppgave 6. (93%)

17) B. Den potensielle energien til et system av flere punktladninger er lik summen av potensiell energi assosiert med alle par av punktladninger: $U = \sum_{i<j} U_{ij}$. Summe-notasjonen her betyr at vi summerer over alle par av ladninger $i, j$ med betingelsen at $j$ er større enn $i$. Da teller vi hvert par *en* gang, slik vi skal. Her får vi

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \frac{(-2Q^2)}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2a} \\ &= -\frac{8Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \\ &= -\frac{7Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

Og vi har brukt at potensiell energi til et par av punktladninger $q$ og $q'$ i innbyrdes avstand $r$ er lik $qq'/4\pi\varepsilon_0 r$. (70%)

18) B. Potensiell energi pr volumenhet lagret i et elektrisk felt $E$ er $u = \varepsilon_0 E^2/2$. Her har vi et uniformt elektrisk felt på 2kV/m i rommet mellom to parallelle plater med areal 1 m$^2$ og innbyrdes avstand 1 cm, dvs i et volum 0.01 m$^3$. Dermed:

$$U = 0.5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2000^2 \cdot 0.01 = 177 \cdot 10^{-9}$$

dvs 177 nJ. (68%)

19) D. Gauss' lov: Netto elektrisk fluks ut gjennom lukket flate er proporsjonal med netto ladning innenfor flaten. Her er ladningene hhv $q$, 0, $-q$ og $2q$ innenfor flatene 1, 2, 3 og 4. Altså mest innenfor flate 4. (91%)

20) B. Ifølge Gauss' lov er netto fluks gjennom en lukket flate lik netto ladning innenfor flaten dividert med $\varepsilon_0$. Torusen "skjærer ut" to sirkulære skiver av det ladete planet med radius $(b-a)/4$, dvs et totalt areal $2\pi(b-a)^2/16 = \pi(b-a)^2/8$. Ladningen innenfor torusens overflate er følgelig $\sigma\pi(b-a)^2/8$, slik at netto fluks ut gjennom dens overflate blir $\phi = \sigma\pi(b-a)^2/8\varepsilon_0$. (49%)

21) C. Tyngdekraften balanseres av den elektriske kraften når $mg = -qE$. Med elektrisk felt rettet nedover blir elektrisk kraft rettet oppover dersom oljedråpen har negativ ladning. Det er altså snakk om et overskudd av elektroner, så alternativ A er ikke aktuelt. Med radius $r$ og massetetthet $\rho$ blir dråpens masse $m = \rho \cdot 4\pi r^3/3$. En potensialforskjell $V$ mellom to store parallelle metallplater i innbyrdes avstand $d$ betyr et uniformt elektrisk felt mellom platene $E = V/d$. Bruker vi disse tre ligningene, finner vi et uttrykk for dråpens ladning:

$$q = -\frac{mg}{E} = -\frac{g \cdot \rho \cdot 4\pi r^3/3}{V/d} = -\frac{4\pi r^3 g d\rho}{3V}$$

som med tallverdiene innsatt gir $q = -8.0 \cdot 10^{-19}$ C. Ett elektron har ladning $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, så dråpen har et overskudd på 5 elektroner. (61%)

22) C. Elektrisk felt fra uendelig stort plan med ladning $\sigma$ pr flateenhet er $\sigma/2\varepsilon_0$ (utledet ved hjelp av Gauss' lov i forelesningene). Positivt ladet plan betyr at det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ er rettet bort fra planet. Følgelig *avtar* potensialet når vi forflytter oss bort fra planet. I en avstand $d$ har potensialet endret seg med $-Ed$. Altså er

$$d = \frac{V}{E} = \frac{2\varepsilon_0 V}{\sigma} = \frac{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4}{32 \cdot 10^{-6}} = 5.5 \cdot 10^{-3}$$

dvs i enheten meter. Som er det samme som 0.55 cm. (59%)

23) B. Ei kule med radius $R$ og ladning $Q$ jevnt fordelt på overflaten har potensiell energi $U = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$. Hvis dette skal tilsvare energien $m_e c^2$ for et elektron med ladning $-e$, betyr det at elektronet har radius

$$R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 1.4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Her var de tre gale alternativene så forskjellige fra det riktige svaret at selv om en ikke husket om det skulle stå 8 eller 4 eller noe annet i nevneren, burde det være mulig å komme fram til rett svar. (66%)

24) B. Ettersom $\boldsymbol{E}(r) = -(dV/dr)\hat{r}$, innebærer konstant $V$ at $E = 0$. Bare kurve 3 passer med dette. (90%)

25) D. Sammenhengen gitt i forrige oppgave betyr at konstant og negativ $E$ tilsvarer lineært voksende $V$ og omvendt for konstant og positiv $E$. Kurve 4 passer med dette. (70%)

26) D. Legg en gaussflate inne i den ytterste kula. Da er $E = 0$ overalt på gaussflaten, så ifølge Gauss' lov, skal det være null netto ladning innenfor denne flaten. De to innerste kulene har til sammen ladning $-2Q$. Dermed må indre overflate på ytterste kule ha ladning $2Q$. (Ingen netto ladning inne i metallkulene.) (73%)

27) A. Kulesymmetrisk ladningsfordeling gir elektrisk felt som om all ladning "innenfor" var samlet i sentrum. Her er ladning "innenfor" punktet P lik $-3Q$, så feltet er $-3Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. (83%)

28) B. Vi tar tipset i oppgaven og sjekker hvilket alternativ som blir tilnærmet lik $Q/4\pi\varepsilon_0 x$ når $x \gg R$, dvs potensialet fra en punktladning. Potensialene i A og D er helt sikkert gale for disse vokser med økende avstand $x$. Potensialet i C går riktignok mot null for økende $x$, men på feil måte, som $1/x^3$ og ikke som $1/x$. Da har vi igjen B, og vi ser umiddelbart at dette potensialet går mot null for store $x$, for da er

$$\sqrt{x^2 + R^2} - x \simeq x - x = 0$$

Tar vi med ett ledd til i rekkeutviklingen av kvadratrotuttrykket, finner vi det ønskede potensialet:

$$\sqrt{x^2 + R^2} = x\sqrt{1 + R^2/x^2} \simeq x(1 + R^2/2x^2) = x + R^2/2x$$

og dermed

$$\frac{Q\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \simeq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

(49%)

29) D. Bruk av Gauss' lov slik som i oppgave 26 gir ladning $Q$ både på indre og ytre overflate av kuleskallet. Feltlinjene i figur 4 stemmer med dette. Figur 1 er åpenbart feil: Feltlinjene kan ikke gå gjennom kuleskallet da $E = 0$ inne i kuleskallet. Figur 2 tilsvarer *positiv* ladning på innerste kule (feltlinjer utover). Figur 3 ville ha vært riktig med ladning $3Q$ på kuleskallet, og dermed netto ladning $2Q$ i hele systemet. (77%)

30) C. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet stå vinkelrett på sylinderens akse. Velger derfor sylinder med radius $r$ og lengde $L$ som gaussflate. De to endeflatene av gauss-sylinderen gir ikke bidrag til integralet i Gauss' lov for der står $\boldsymbol{E}$ vinkelrett på flatenormalen $d\boldsymbol{A}$. På resten av gauss-sylinderen er $E$ konstant og rettet parallelt med flatenormalen. Arealet av denne flaten er $2\pi rL$, så "venstre side" i Gauss' lov blir $E(r)\cdot 2\pi rL$. Netto ladning innenfor denne sylinderen er

$$q(r) = \int \rho(r)dV = \int_0^r \rho_0 L\cdot 2\pi r\,dr = \rho_0 L\pi r^2$$

dersom $r < R$. (Dersom $r > R$, blir $q(r) = \rho_0 L\pi R^2$.) Dermed blir feltet inne i sylinderen

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}$$

som stemmer med kurve 3. (50%)

31) D. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet stå vinkelrett på den ladete skiva, dvs det peker i $z$-retningen, og i positiv $z$-retning for $z > 0$ og omvendt for $z < 0$. Vi velger derfor (f.eks.) fyrstikkeske med areal $A$ i $xy$-retning og lengde $2z$ i $z$-retning, symmetrisk plassert mellom $-z$ og $z$. Feltet er nå parallelt med flatenormalen til gaussflaten på de to endeflatene med areal $A$, og vinkelrett på flatenormalen på de fire andre sideflatene. Venstre side i Gauss' lov blir dermed $2E(z)A$. Netto ladning innenfor denne fyrstikkesken er

$$q(z) = \rho_0 V = \rho_0\cdot A\cdot 2z$$

dersom $z < d$. Dersom $z > d$, blir $q(z) = \rho_0\cdot A\cdot 2d$. Feltet inne i skiva blir dermed

$$E(z) = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0}$$

og utenfor skiva

$$E(z) = \frac{\rho_0 d}{\varepsilon_0}$$

dvs konstant. Kurve 4 stemmer med dette. (45%)

32) C. Vi har bevist i forelesningene at $E = 0$ inne i et tomt hulrom inne i en elektrisk leder. Det betyr at det eneste feltet som kan eksistere inne i hulrom 2 er det som skapes av ladningen $q$ som er der. Men denne ladningen virker jo ikke på seg selv med noen kraft, så $F_2 = 0$. (49%)

33) C. Figur 4 er åpenbart feil: Null felt inne i elektrisk leder. Figur 1 er feil fordi hele systemet har ladning $2q$, så det må være et felt forskjellig fra null på utsiden av kula. Figur 2 er feil fordi de to punktladningene skaper elektrisk felt inne i hulrommene. Figur 3 er riktig. (82%)

34) A. Vi bruker Gauss' lov og legger gaussflater like utenfor de to hulrommene, altså gaussflater som i sin helhet er inne i metallkula. Da er $E = 0$ overalt på disse gaussflatene, så netto ladning innenfor dem er også lik null. Konklusjon: Null ladning på overflaten av hulrom 1, ladning $-Q$ på overflaten av hulrom 2. Metallkula er alt i alt nøytral, så resterende ladning $Q$ må fordele seg på dens ytre overflate. (89%)

35) A. Kapasitansen til en kondensator er bestemt av dens geometriske utforming og hva slags materiale vi har mellom dens to ledere. Kapasitansen er *ikke* avhengig av potensialforskjellen mellom de to lederne eller ladningen på dem. (17% !!)

36) A. De to metallplatene representerer hvert sitt ekvipotensial, hhv $V_0$ øverst og 0 nederst. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet overalt mellom platene være rettet nedover. (Vi ser bort fra randeffekter.) Men da må den elektriske feltstyrken være like stor i de to halvdelene. Dette oppnås ved at fri (mobil) ladning på metallplatene fordeler seg ulikt mellom høyre og venstre side. På høyre side får vi sterkest polarisering, og dermed mest indusert ladning på overflaten av dielektrikumet. Dette kompenseres ved at mest fri ladning i metallplatene plasserer seg på høyre side. *Total* ladning blir like stor på venstre og høyre side. Dermed: Med samme feltstyrke i hele rommet mellom platene må vi ha $V_1 = V_3$ og $V_2 = V_4$. (49%)

37) C. Sterkest polarisering øverst, hvor vi har dielektrikum med størst relativ permittivitet. Her svekkes det elektriske feltet mest. Ingen forskjell mellom høyre og venstre her, så fri ladning fordeler seg jevnt på metallplatene. Følgelig blir den elektriske forskyvningen uniform mellom platene. Alternativ C stemmer med dette. (67%)

38) C. Newtons 2. lov: $F = ma = QE$, dvs $a = QE/m$, dvs størst akselerasjon $a$ for størst $Q$ sålenge massene er like store. Altså vil de to punktladningene $\pm 2q$ komme først fram til hhv 3 og 4. Tilstedeværelsen av dielektrikumet påvirker *ikke* den elektriske feltstyrken i det luftfylte rommet der ladningene befinner seg. (74%)

39) A. Kapasitansen til en platekondensator med plateareal $A$ og avstand $x$ mellom platene er $\varepsilon A/x$, der $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ er permittiviteten til mediet som fyller rommet mellom platene. Her har vi altså en seriekobling av to kapasitanser, en med plateareal $A$, plateavstand $3d/4$ og luftfylt, den andre med plateareal $A$, plateavstand $d/4$ og fylt med dielektrikum med relativ permittivitet $\varepsilon_r = 3$. Total kapasitans til seriekoblede kapasitanser finnes ved å summere inverse enkeltkapasitanser og til slutt ta det inverse av denne summen. Dermed:

$$\begin{aligned} C &= (1/C_1 + 1/C_2)^{-1} \\ &= (3d/4\varepsilon_0 A + d/12\varepsilon_0 A)^{-1} \\ &= (10d/12\varepsilon_0 A)^{-1} \\ &= 6\varepsilon_0 A/5d \end{aligned}$$

(49%)

40) B. Total ladning i hver av de to halvkulene er $\pm\rho_0 \cdot (1/2) \cdot (4\pi R^3/3) = \pm 2\rho_0 \pi R^3/3$. Uten å regne kan vi vel anslå at midlere avstand mellom positiv og negativ ladning må være litt mindre enn $R$. Kulas elektriske dipolmoment må derfor være i underkant av

$$2\rho_0 \pi R^4/3$$

Bare svaret i B stemmer med dette. En eksakt utregning blir i samme gate som i oppgave 5 i øving 6. (49%)