Institutt for fysikk, NTNU
FY1003 Elektrisitet og magnetisme
TFY4155 Elektromagnetisme
Vår 2006

Midtsemesterprøve fredag 10. mars kl 0830 – 1130.

Løsningsforslag

1) A. (Andel som svarte riktig: 83%)
Det er et empirisk faktum at superposisjonsprinsippet gjelder for $\boldsymbol{F}$. Da følger det automatisk at det også gjelder for $\boldsymbol{E}$ og V.

2) B. (Andel som svarte riktig: 91%)
Det elektriske feltet vil resultere i en kraft på protonet i positiv z-retning, og dermed en akselerasjon i positiv z-retning. Hastigheten i y-retning (og x-retning, for den saks skyld) påvirkes ikke, så protonet vil følge en bane i yz-planet.

3) A. (Andel som svarte riktig: 96%)

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(4 \cdot 10^{-9})^2} = 1.44 \cdot 10^{-11} \text{ N} = 14.4 \text{ pN}$$

4) D. (Andel som svarte riktig: 35%)
Konstant $V = V_0$ for $r < R$ betyr at $E = 0$ for $r < R$, og $V(r) = V_0 R/r$ for $r > R$ betyr at $E(r) = V_0 R/r^2$ for $r \geq R$. Dette tilsvarer en jevnt fordelt ladning på et ledende kuleskall med radius R, men det spiller ingen rolle hva slags medium vi har innenfor kuleskallet, så lenge det er elektrisk nøytralt.

5) A. (Andel som svarte riktig: 73%)
To uendelig store parallelle plan med motsatt ladning resulterer i at det elektriske feltet blir null på utsiden av planene og konstant (men ikke null) i rommet mellom planene. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at potensialet V endrer seg lineært med avstanden når vi går fra det ene planet til det andre, mens vi må ha konstant potensial på utsiden av de ladede planene. (Men da ikke samme konstante verdi på de to sidene, selvsagt, ettersom V må være kontinuerlig.) Kurve nr 1 passer bra.

6) D. (Andel som svarte riktig: 88%)
Her er det elektriske feltet konstant, så vi får

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \\
&= -E_0(\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}) \int_{(0,0,0)}^{(a,a,a)} (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\
&= -E_0(a - 3a + 2a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

7) D. (Andel som svarte riktig: 94%)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\nabla V \\
&= -\frac{dV}{dx}\hat{x} - \frac{dV}{dy}\hat{y} \\
&= -20\frac{\text{V}}{\text{m}^4}xy^2\hat{x} - 20\frac{\text{V}}{\text{m}^4}x^2y\hat{y}
\end{aligned}
$$

8) C. (Andel som svarte riktig: 79%)
$V(0,0) = 50$ V og $V(2,3) = 50 + 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 410$ V, slik at $\Delta V = 410 - 50 = 360$ V.

9) B. (Andel som svarte riktig: 83%)
Når $V = V(x)$, er $E(x) = -dV/dx$. Kurve nr 3 passer med dette. (Det ser ut til at vi kan skrive $V(x) = V_0 \sin kx$ slik at $E(x) = -dV/dx = -V_0 k \cos kx$, dvs kurve 3.)

10) D. (Andel som svarte riktig: 80%)
Det elektriske feltet er peker bort fra et positivt ladet plan og er konstant lik $E = \sigma/2\varepsilon_0$ der σ er planets ladning pr flateenhet. Potensialet avtar dermed lineært med avstanden til planet, $V(x) = V_0 - \sigma x/2\varepsilon_0$, med $V_0 = 1000$ V. Hvis nå $V = 0$ i en avstand $x = 1$ m, har vi

$$1000 - \frac{\sigma \cdot 1}{2\varepsilon_0} = 0$$

og dermed

$$\sigma = 2000\varepsilon_0 = 1.77 \cdot 10^{-8} \simeq 18 \cdot 10^{-9}$$

dvs 18 nC/m^2.

11) C. (Andel som svarte riktig: 50%)
Hele systemet er en sammenhengende elektrisk leder, og derfor et ekvipotensial. Potensialet på ei slik metallkules overflate er

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

som gir

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

dvs

$$Q_1 = Q_2 \frac{R_1}{R_2} < Q_2$$

Potensiell energi til ladningen på ei slik kule er

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

som gir

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{Q_1^2 \cdot R_2}{Q_2^2 \cdot R_1} = \frac{Q_1}{Q_2} < 1$$

Elektrisk feltstyrke på overflaten til ei slik kule er

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

som gir

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_1 \cdot R_2^2}{Q_2 \cdot R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} > 1$$

Dermed blir C riktig.

12) C. (Andel som svarte riktig: 77%)
$\sigma = Q/A$, $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 A$, $\Delta V = Ed = Qd/\varepsilon_0 A$, som gir

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0.1}{0.2 \cdot 10^{-3}} \simeq 4.4 \cdot 10^{-9}$$

dvs 4.4 nF.

13) C. (Andel som svarte riktig: 60%)
Tiltrekkende kraft mot venstre: 1 (Vi dropper faktorene $4\pi\varepsilon_0$ og q^2 og setter lengden av kvadratets sidekant lik 1.) Tiltrekkende kraft nedover: 3. Frastøtende kraft på skrå oppover mot høyre: $(2\sqrt{2}/(\sqrt{2}^2) = \sqrt{2}$. Horisontalkomponenten av denne er $\sqrt{2} \cdot \sin\pi/4 = 1$, som dermed akkurat kansellerer den tiltrekkende kraften mot venstre (fra ladningen i øvre venstre hjørne). Vertikalkomponenten av kraften på skrå oppover mot høyre blir også lik 1, slik at total kraft blir lik 2, rettet nedover. Dermed pil nr 3.

14) C. (Andel som svarte riktig: 66%)
Gauss' lov inne i kula ($r < R$) gir

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho_0 dV = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

og dermed $E(r) \sim r$, dvs graf 3.

15) A. (Andel som svarte riktig: 67%)
I punktene A og C bidrar de to ladningene til det elektriske feltet med vektorer som peker i samme retning. Det totale feltet der kan da ikke bli null. I punktet B peker feltbidragene fra q_1 og q_2 i motsatt retning, så der kan det totale feltet tenkes å bli null.

16) A. (Andel som svarte riktig: 67%)
En elektrisk dipol vil ikke bli utsatt for noen nettokraft i et uniformt elektrisk felt: Kraften på den negative "enden" av dipolen er like stor men motsatt rettet kraften på den positive "enden".

17) B. (Andel som svarte riktig: 62%)
Inne i plastlaget er den elektriske feltstyrken

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}$$

Dermed er polariseringen

$$P(r) = \chi_e \varepsilon_0 E(r) = \frac{\chi_e Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}$$

som kun passer med graf 2.

18) D. (Andel som svarte riktig: 61%)
Inne i metallkula er $E = 0$, så graf 2 er opplagt feil. Fra oppgave 17 har vi $E(r)$ inne i plastlaget. Utenfor plastlaget blir feltet

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dvs det er 4 ganger så stort rett på utsiden av plastlaget som rett på innsiden. Polarisering i plastlaget resulterer i indusert (bundet) ladning på indre og ytre overflate av plastlaget. Graf 4 blir korrekt.

19) C. (Andel som svarte riktig: 79%)
$E = 0$ i metallet, $E = E_0$ i luftlaget, $E = E_0/\varepsilon_r$ i de dielektriske lagene. Dermed blir $E_2 > E_4 > E_1 > E_3$.

20) D. (Andel som svarte riktig: 50%)
Det elektriske feltet peker overalt fra positiv plate mot negativ plate så lenge vi er i området mellom de to platene. (Alternativt er feltet null i metall-laget.) Det betyr at potensialet avtar fra venstre mot høyre, bortsett fra gjennom metallet, der det er konstant. Konklusjonen blir at $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$.

21) C. (Andel som svarte riktig: 67%)
Hvert "ladningspar" q og $-q$ med innbyrdes avstand 0.106 nm gir et elektrisk dipolmoment

$$p = qa = 0.30 \cdot 0.106 = 0.0318$$

i enheten $e\cdot$nm. Kun "vertikal" komponent av disse overlever når vi legger sammen de to vektorene. Dermed:

$$p_{\text{tot}} = 2p\cos\frac{105^\circ}{2} = 0.039$$

22) A. (Andel som svarte riktig: 71%)
Her ville det lureste ha vært å prøve å sette $\varepsilon_r = 1$ i de alternative svarene. Da er det kun i A at vi vil finne $C_1 = C_0$.
Med "vanlig" framgangsmåte: Det elektriske feltet er uendret i de to luftlagene. Inne i skiva er feltet redusert med en faktor $1/\varepsilon_r$. Potensialforskjellen mellom de to metallplatene blir dermed

$$\Delta V = \frac{2d}{3}E_0 + \frac{d}{3}\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Dermed:

$$C_1 = \frac{Q}{E_0 d\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\varepsilon_r}\right)} = \frac{C_0 \cdot 3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}$$

23) A. (Andel som svarte riktig: 23%)

Potensialet i et gitt punkt finner vi ved å legge sammen bidragene fra de fire punktladningene. Dermed:

$$V_2 = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a/2} - 2 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{5/4}a} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Av symmetrigrunner er

$$V_1 = -V_2$$

slik at

$$\Delta V = 2V_2 = 2V_0\left(1 - 5^{-1/2}\right)$$

24) C. (Andel som svarte riktig: 43%)
Med 4 punktladninger har vi i alt 6 ladningspar som vekselvirker seg i mellom. 4 av disse parene har innbyrdes avstand a. To av dem gir positiv potensiell energi, to av dem gir like stor negativ potensiell energi. Følgelig blir totalt bidrag fra disse 4 parene til U lik null. Vi står igjen med 2 ladningspar i innbyrdes avstand $\sqrt{2}a$, slik at

$$U = -2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}a} = -U_0 \cdot 2^{-3/2}$$

25) C. (Andel som svarte riktig: 92%)
I punkt 3 midt på forbindelseslinjen mellom de to nederste ladningene gir begge de to nederste ladningene bidrag til elektrisk felt rettet mot venstre. De to øverste ladningene gir også et bidrag rettet mot venstre, i og med at de bidrar med like store men motsatt rettede vertikalkomponenter. Dermed må også totalt felt i punkt 3 peke mot venstre.

26) A. (Andel som svarte riktig: 84%)
Både C og D må være feil fordi elektrisk felt fra ladet kule avtar med avstanden. Videre er B feil fordi metallisk skive ville ha gitt $E = 0$ inni skiva. Altså må A være riktig. Bruk av Gauss' lov gir at $E(x) \sim x$ inni ei slik skive med uniform ladning pr volumenhet.

27) D. (Andel som svarte riktig: 62%)
Med valget $V = 0$ på midtplanet blir protonets totale energi lik

$$T_0 = \frac{m_p v_0^2}{2} = 2.0875 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

Ved venstre plate er potensialet

$$V_+ = E \cdot 2\ \mathrm{m} = 4.0\ \mathrm{kV}$$

slik at dersom protonet hadde nådd fram til venstre plate, ville det der ha hatt en potensiell energi lik

$$e \cdot V_+ = 6.4 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

Dette er mer enn protonets totale energi, så det er klart at protonet snur før det treffer venstre plate. Ved høyre plate er potensialet $V_- = -V_+$ slik at protonet har kinetisk energi

$$T_0 - e \cdot V_- = 8.4875 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

når det treffer høyre plate. Dette tilsvarer en hastighet

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 8.4875 \cdot 10^{-16}/m_p} \simeq 10^6 \text{ m/s}$$

28) D. (Andel som svarte riktig: 84%)

$$\Delta V = 2.0 \cdot 4 = 8 \text{ kV}$$

29) C. (Andel som svarte riktig: 81%)
Bruk av Gauss' lov gir at det må ligge en ladning $-Q$ på indre overflate av ytre kuleskall.

30) A. (Andel som svarte riktig: 82%)
Gauss' lov med kuleformet gaussflate med radius $4R$ gir $E = 0$ i og med at netto ladning innenfor er lik null.

31) C. (Andel som svarte riktig: 28%)
Potensialforskjellen bestemmes ved å beregne linjeintegralet av det elektriske feltet (der det er forskjellig fra null). Dermed:

$$\Delta V = \int_R^{2R} E(r)dr = \int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

32) A. (Andel som svarte riktig: 87%)
Total kraft på ladningen Q med masse M:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

som gir akselerasjonen

$$a = F/M = \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 M a^2}$$

33) C. (Andel som svarte riktig: 45%)
Null potensial (uendelig) langt ute på x-aksen. Potensial i startposisjonen:

$$V(2a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Dermed:

$$\Delta U = Q \cdot \Delta V = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

som omgjøres til kinetisk energi, dvs

$$v = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 M a}}$$

34) C. (Andel som svarte riktig: 40%)

Elektrisk felt står normalt på ekvipotensialflaten. Dermed er

$$E_x = E_y = 0$$

35) B. (Andel som svarte riktig: 34%)
$F = QE$, der E er feltet fra *den andre* platen. Dermed:

$$F = Q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon A}$$

36) D. (Andel som svarte riktig: 40%)
$\boldsymbol{p}$ parallell med $\boldsymbol{E}$ gir minimal potensiell energi, dvs

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

(Se også regneøving.)

37) D. (Andel som svarte riktig: 67%)

$$E \simeq E_0 = 10^4 \text{ V/m}$$
$$\Rightarrow P = 0.0007 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 = 61.95 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2$$
$$P_{\max} = \frac{p \cdot N_A}{v_m} = \frac{4.07 \cdot 10^{-31} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{2.24 \cdot 10^{-2}}$$
$$\Rightarrow \frac{P}{P_{\max}} \simeq 5.7 \cdot 10^{-6}$$

38) B. (Andel som svarte riktig: 23%)

$$U = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0 \int \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr$$

Dermed:

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\int_R^{2R} \frac{dr}{r^2} + \int_{3R}^{\infty} \frac{dr}{r^2}\right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}\right) \\ &= \frac{5Q^2}{48\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

39) C. (Andel som svarte riktig: 87%)
Positiv halvdel gir bidrag på skrå nedover og mot høyre. Negativ halvdel gir tilsvarende stort bidrag på skrå nedover og mot venstre. Til sammen et felt rettet nedover.

40) B. (Andel som svarte riktig: 36%)

$$d\boldsymbol{p} = \hat{z} \cdot dq \cdot 2z = \hat{z} \cdot \lambda \cdot R \cdot d\phi \cdot 2R \cdot \sin\phi$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{p} = \hat{z} \cdot 2R^2 \cdot \lambda \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = \hat{z} \cdot 4R^2 \cdot \lambda$$

En kan også gjøre et fornuftig overslag ved å bestemme total ladning på hver halvdel, og deretter en omtrentlig midlere avstand mellom positive og negative ladninger.