

Midtsemesterprøve onsdag 7. mars 2007 kl 1300 – 1500.

Løsningsforslag.

Versjon A

1) Hvilken påstand om elektrisk potensial er feil?

A Dersom det elektriske feltet i et område er uniformt, er potensialet i dette området konstant.

I et uniformt elektrisk felt endres potensialet lineært med posisjonen.

2) Hvilken påstand om elektrisk ladning er riktig?

A Netto ladning på en metallkule ligger alltid på overflaten.

Se forelesningene. I en isolator befinner netto ladning seg der vi plasserer den.

3) Hvilken påstand om en ladet leder er feil?

C På overflaten av lederen er det null elektrisk felt.

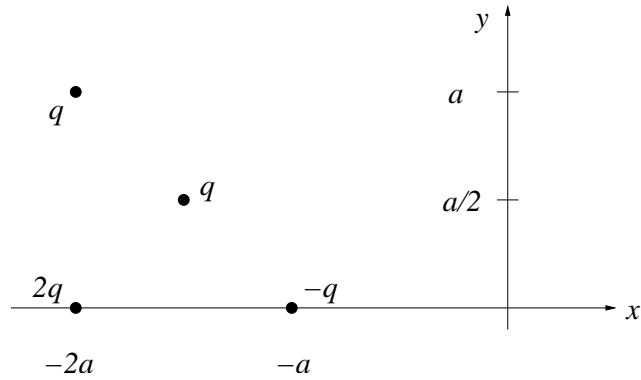
På overflaten av en leder står det elektriske feltet normalt på overflaten.

4) Hvilken påstand er riktig? Kapasitansen til en parallellplatekondensator ...

C ... blir mindre hvis vi øker avstanden mellom platene.

5) Hva blir kraften på ladningen q som er plassert i posisjon $(x, y) = (-3a/2, a/2)$?

D $\hat{x} \sqrt{2}q^2/\pi\epsilon_0a^2$



De tre andre punktladningene ligger alle i like stor avstand fra den i midten. Kraften fra ladningen $2q$ nederst til venstre virker på skrå oppover mot høyre (med retning 45 grader i forhold til positiv x -retning), mens kraften fra de to andre begge virker på skrå nedover mot høyre. Total kraft må dermed virke i positiv x -retning.

6) Hva er total potensiell energi til de fire punktladningene i oppgave 5?

B $3q^2/4\sqrt{2}\pi\epsilon_0a$

$$U = \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Dermed kansellerer bidragene til U fra vekselvirkningen mellom $2q$ og q oppe til venstre og mellom $2q$ og $-q$ nede til høyre, og fra vekselvirkningen mellom q i midten og q oppe til venstre og mellom q i midten og $-q$ nede til høyre. Vi står igjen med bidrag fra vekselvirkningen mellom q i midten og $2q$ og mellom q oppe til venstre og $-q$ nede til høyre:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0a} (2\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}) = \frac{3q^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0a}$$

7) Tre av ladningene i oppgave 5 holdes fast mens den fjerde, den øverst til venstre, med ladning q og masse m , slippes med null starthastighet fra posisjonen $(-2a, a)$. Hvor stor er farten v til denne ladningen når den har kommet svært langt unna de tre andre?

A $v = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \right) q^2/m\pi\epsilon_0a \right]^{1/2}$

Før den slippes har ladningen oppe til venstre potensiell energi U_1 (i forhold til om den var uendelig langt borte)

$$U_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0a} (2 + \sqrt{2} - 1/\sqrt{2})$$

Når denne ladningen har kommet langt bort, har U_1 blitt omgjort til kinetisk energi $mv^2/2$. Dermed følger det at v er gitt som i alternativ A.

8) To små metallkuler har ladning henholdsvis $6.0 \mu\text{C}$ og $-5.0 \mu\text{C}$. Avstanden mellom kulene er 60 cm. Innbyrdes kraft mellom de to kulene er da

B 0.75 N

Innbyrdes kraft er gitt ved Coulombs lov:

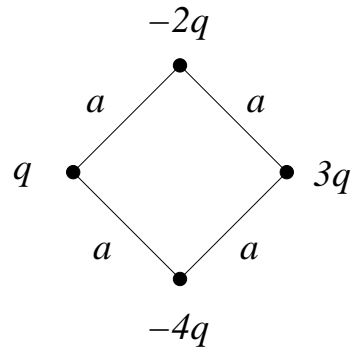
$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-12}}{0.6^2} = 0.75 \text{ N}$$

9) I stor avstand $\mathbf{r} = L \hat{x}$ fra en liten (dvs: utstrekning mye mindre enn L) elektrisk dipol med dipolmoment $\mathbf{p} = p_0 \hat{y}$ er det elektriske feltet $-E_0 \hat{y}$. Feltet i avstand $3L \hat{x}$ fra dipolen er da omtrent lik

A $-0.037 E_0 \hat{y}$

Elektrisk feltstyrke fra en elektrisk dipol avtar med avstanden opphøyd i 3. potens. Tre ganger så stor avstand må dermed gi en feltstyrke redusert til $1/27$. (Selv om en ikke visste at $E(r) \sim 1/r^3$, bør en i det minste vite at det må avta raskere enn som $1/r^2$, noe feltet fra en punktladning gjør. Dermed blir bare A aktuelt svar.)

10) Hva er den elektriske feltstyrken i avstand 30 cm fra de fire ladningene i figuren dersom $q = 1 \mu\text{C}$ og $a = 1 \text{ mm}$?

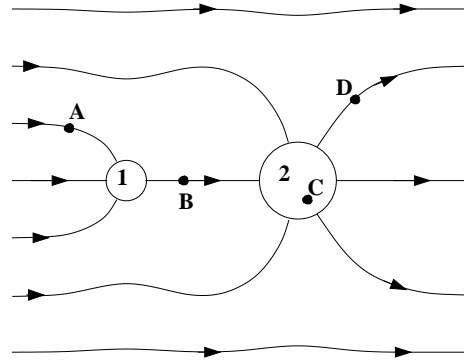


B 200 V/mm

I avstand 30 cm ser dette ut som en enkelt punktladning $Q = -2q = -2 \mu\text{C}$. Dermed:

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0.3^2} = 2 \cdot 10^5 \text{ V/m} = 200 \text{ V/mm}$$

11) Figuren nedenfor viser elektriske feltlinjer i et område som inneholder to metallkuler. Hva kan du si om netto ladning på de to kulene?



D Negativ på kule 1, null på kule 2.

Elektriske feltlinjer starter på positiv ladning og ender på negativ ladning. Derfor netto negativ ladning på kule 1 mens kule 2 er nøytral.

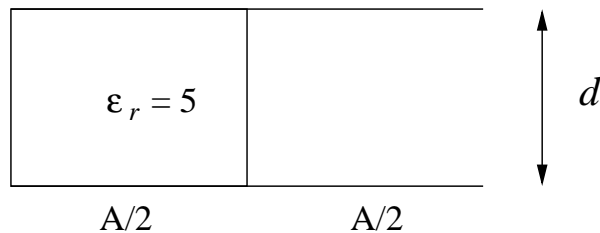
12) I figuren i oppgave 11, i hvilken av de fire posisjonene A, B, C og D er potensialet størst?

A

Elektrisk felt peker fra høyt mot lavt potensial.

13) En parallellplatekondensator har kvadratiske metallplater med areal $A = a^2$, og avstanden mellom platene er d . Volumet mellom platene er delvis fylt med luft (høyre halvdel) og delvis fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet $\epsilon_r = 5$ (venstre halvdel) Metallplatene er store sammenlignet med avstanden mellom dem, dvs $a \gg d$. Hva blir kapasitansen til denne kondensatoren? ($C_0 \equiv \epsilon_0 a^2/d$)

C $3C_0$



Dette er en parallellkobling av to kapasitanser, begge med plateavstand d , areal $a^2/2$, den ene med permittivitet ϵ_0 og den andre med permittivitet $5\epsilon_0$. Dermed:

$$C = \epsilon_0 \frac{a^2/2}{d} + 5\epsilon_0 \frac{a^2/2}{d} = 3\epsilon_0 \frac{a^2}{d} = 3C_0$$

14) I et område er det elektriske feltet

$$\mathbf{E}(r) = E_0 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r^3}{r_0^3} \right) \hat{r}$$

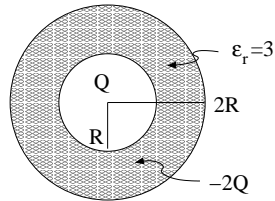
Her er E_0 og r_0 konstanter, mens r angir avstanden fra origo. Hvor mye netto ladning er det da innenfor et kuleskall med radius $2r_0$ og sentrum i origo?

B $-96\pi\epsilon_0 r_0^2 E_0$

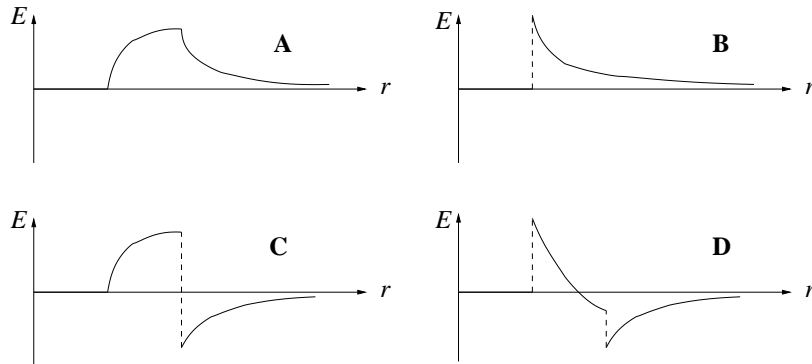
Med Gauss' lov finnes netto ladning innenfor kuleskall med radius $2r_0$:

$$Q_{in}(2r_0) = \epsilon_0 E_0 \left(\frac{2r_0}{r_0} - \frac{(2r_0)^3}{r_0^3} \right) \hat{r} \cdot 4\pi(2r_0)^2 \hat{r} = -96\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$$

15) Ei metallkule har radius R og positiv ladning Q . Kula er belagt med et lag plast (dvs: dielektrikum) med tykkelse R og relativ permittivitet $\epsilon_r = 3$. I plastlaget er en negativ (fri, men ikke mobil) ladning $-2Q$ jevnt fordelt (dvs: konstant ladning pr volumenhet). Hvilken av grafene A – D viser det resulterende elektriske feltet $E(r)$ (slik at $\mathbf{E}(r) = E(r) \hat{r}$)?



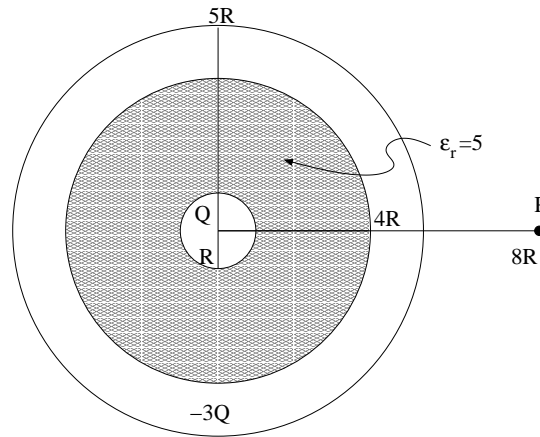
D



Uten å gå i detalj: Like utenfor $r = R$ gir Gauss' lov for D -feltet at $D = Q/4\pi R^2$, og dermed $E = Q/12\pi\epsilon_0 R^2$. Tilsvarende, like innenfor $r = 2R$ gir Gauss' lov for D at $D = -Q/4\pi(2R)^2$, og dermed $E = -Q/48\pi\epsilon_0 R^2$. Endelig, for $r > 2R$ har vi $D(r) = -Q/4\pi r^2$, og dermed $E(r) = -Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Figur D passer med alt dette.

16) Ei metallkule har radius R og positiv ladning Q . Kula er belagt med et lag elektrisk nøytral plast (dvs: dielektrikum) med tykkelse $3R$ og relativ permittivitet $\epsilon_r = 5$. Utenfor plastlaget er det et metallisk kuleskall med tykkelse R og netto ladning $-3Q$. Hvor mye ladning befinner seg da på ytre overflate av det metalliske kuleskallet?

B $-2Q$



Vi må ha null elektrisk felt inne i det metalliske kuleskallet. Da må, med Gauss' lov, en ladning $-Q$ befinne seg på kuleskallets indre overflate. Da er det igjen en ladning $-2Q$ som må befinne seg på ytterste overflate.

17) I oppgave 16, hva er den elektriske feltstyrken i punktet P, dvs i avstand $8R$ fra systemets sentrum (origo)?

A $Q/128\pi\epsilon_0 R^2$

Med Gauss' lov, gaussflate med radius $8R$, netto ladning $-2Q$ innenfor har vi

$$E(r = 8R) = 2Q/4\pi\epsilon_0(8R)^2 = Q/128\pi\epsilon_0 R^2$$

(Med retning innover, men her var det bare snakk om feltstyrken, og ikke retningen.)

18) I oppgave 16, hva er potensialforskjellen mellom den innerste metallkula og punktet P?

C 0

$$\Delta V = V_P - V(R) = - \int_R^{8R} E(r) dr = 0$$

dersom vi setter inn at $E(r) = -2Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ for $r > 5R$, $E(r) = 0$ for $4R < r < 5R$ og $E(r) = Q/20\pi\epsilon_0 r^2$ for $R < r < 4R$.

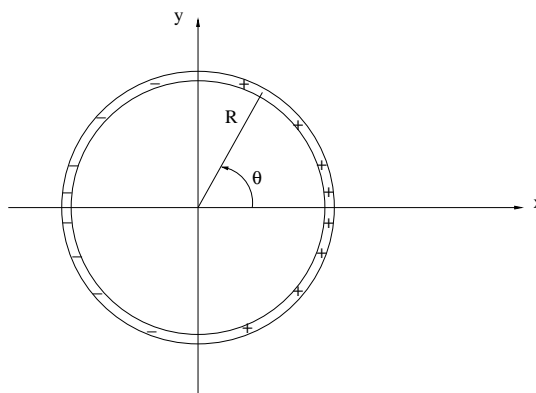
19) Hvor stort arbeid må utføres for å endre ladningen fra null til $-2Q$ på ei metallkule med radius R ?

C $Q^2/2\pi\epsilon_0 R$

$$W = U_E = \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = Q^2/2\pi\epsilon_0 R$$

dersom vi setter inn at $E(r) = -2Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ for $r > 5R$, $E(r) = 0$ for $4R < r < 5R$ og $E(r) = -Q/20\pi\epsilon_0 r^2$ for $R < r < 4R$.

20) En tynn ring med radius R har ladning $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos \theta$ pr lengdeenhet. Ringen ligger i xy -planet med sentrum i origo, og vinkelen θ er som angitt i figuren nedenfor. Hva er ringens dipolmoment?



B $\pi\lambda_0 R^2$

Total positiv ladning på halvringen til høyre er

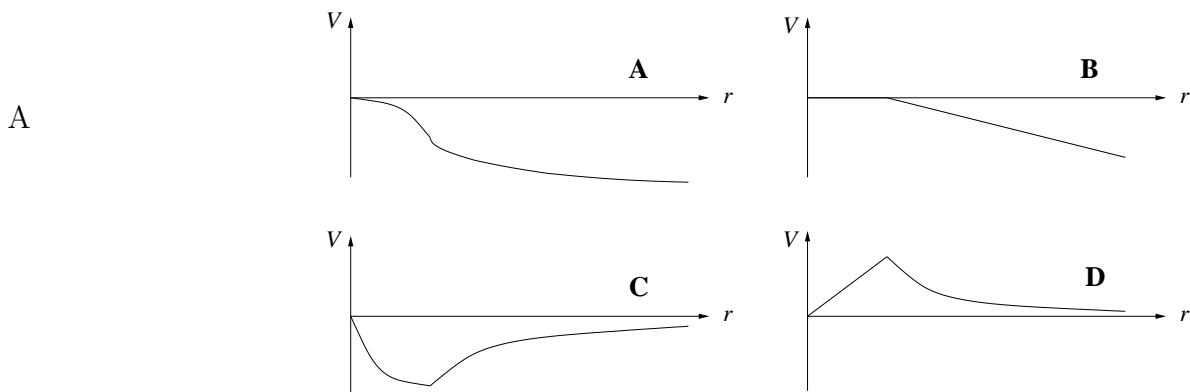
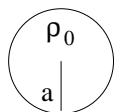
$$q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos \theta \cdot R d\theta = 2\lambda_0 R$$

Tilsvarende negativ ladning befinner seg på halvringen til venstre. Etttersom vi har mest ladning i nærheten av x -aksen, skulle midlere avstand mellom positiv og negativ ladning ligge et sted mellom R og $2R$. La oss gjette på en midlere avstand omtrent lik $3R/2$. Det gir et dipolmoment på omtrent $3\lambda_0 R^2$, så alternativ B må være det riktige.

Eksakt utregning:

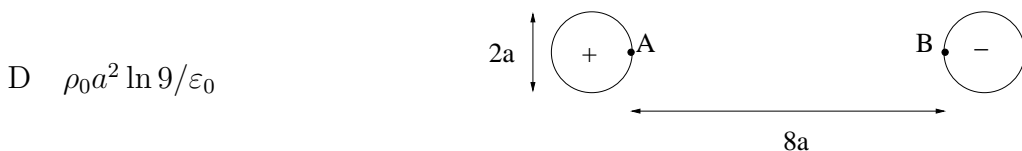
$$\begin{aligned} p &= \int dp \\ &= \int dq \cdot \Delta x \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\lambda_0 \cos \theta R d\theta) \cdot (2R \cos \theta) \\ &= 2\lambda_0 R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \pi\lambda_0 R^2 \end{aligned}$$

21) Figuren viser et tverrsnitt av en uendelig lang rett tråd med radius a og uniform ladning ρ_0 pr volumenet. Hvilken av grafene A – D viser potensialet V som funksjon av avstanden r fra trådens senterakse? (Her har vi valgt $V = 0$ i $r = 0$.)



Utenfor tråden avtar den elektriske feltstyrken proporsjonalt med avstanden fra trådens senterakse (se tidligere øving), og feltet er rettet utover ettersom ladningen er positiv. Det må bety at potensialet må avta som $\ln r$ utenfor tråden, ettersom $\mathbf{E} = -\nabla V$. Dette er egentlig nok til å konkludere med at A er riktig. Vi kan videre bruke Gauss' lov til å finne at E vokser lineært med r inne i tråden, hvilket må bety at V går som $-r^2$ inne i tråden.

22) Figuren viser et tverrsnitt gjennom to parallelle uendelig lange rette tråder som begge har radius a . Avstanden mellom trådene (senter-til-senter) er $10a$. De to trådene har uniform ladning pr volumenet henholdsvis ρ_0 og $-\rho_0$. Hva er da potensialforskjellen mellom punktene A og B i figuren? (Avstanden fra A til B er $8a$.)



D $\rho_0 a^2 \ln 9 / \epsilon_0$

Med Gauss' lov har vi elektrisk felt fra slike uendelig lange rette tråder:

$$E(x) = \pm \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 x}$$

der positivt fortegn gjelder positivt ladet tråd og omvendt. Her har vi valgt x -aksen til å gå gjennom sentrum av begge trådene. La oss velge $x = 0$ i sentrum av den positivt ladde. Totalt elektrisk felt blir da

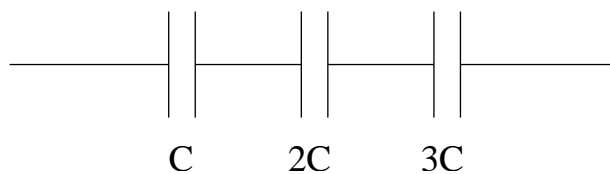
$$E(x) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{10a - x} \right)$$

Potensialforskjellen mellom A og B blir dermed

$$\Delta V = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^{9a} E(x) dx = \frac{\rho_0 a^2 \ln 9}{\epsilon_0}$$

23) Figuren viser tre kondensatorer koblet i serie. Hva er systemets totale kapasitans?

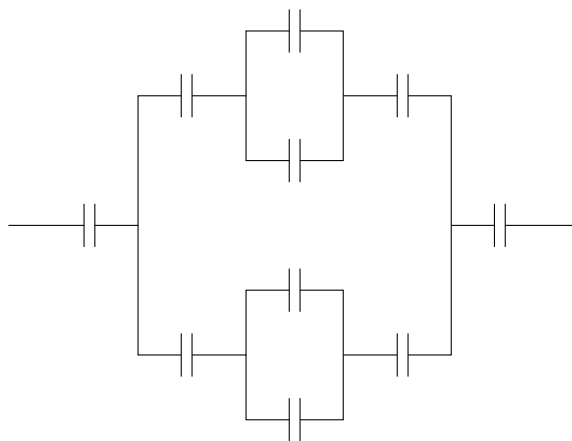
A $6C/11$



$$C_{tot} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{3C} \right)^{-1} = 6C/11$$

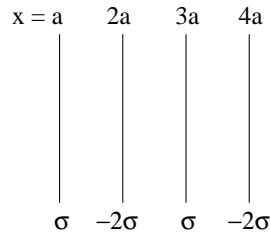
24) Figuren viser ti kondensatorer koblet sammen. Hver av dem har kapasitans C . Hva er systemets totale kapasitans?

C $4C/13$

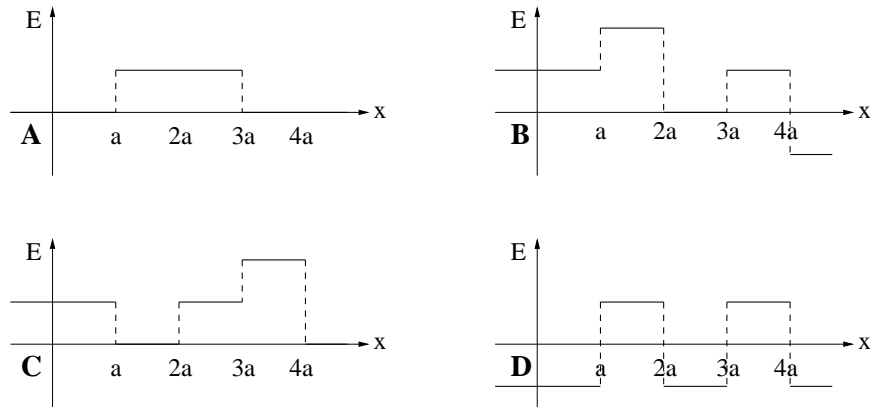


Hver av parallellkoblinene i midten har kapasitans $2C$, som i serie med to kapasitanser C gir i alt $2C/5$. To slike i parallell gir dermed $4C/5$, som endelig i serie med to stykker C gir $4C/13$.

25) Fire uendelig store plan er plassert i $x = a, 2a, 3a$ og $4a$. De fire planene har ladning pr flateenhet henholdsvis $\sigma, -2\sigma, \sigma$ og -2σ . Hvilken figur viser det resulterende elektriske feltet $E(x)$ (slik at $\mathbf{E}(x) = E(x) \hat{x}$)?



B



Plan med ladning σ pr flateenhet gir feltstyrke $\sigma/2\epsilon_0$, rettet bort fra planet hvis positiv ladning og inn mot planet hvis negativ ladning. Plan med ladning 2σ pr flateenhet gir feltstyrke σ/ϵ_0 . I enheter av $\sigma/2\epsilon_0$ blir totalt elektrisk felt dermed, for $x < a$ lik $-1+2-1+2=+2$, for $a < x < 2a$ lik $+1+2-1+2=+4$, for $2a < x < 3a$ lik $+1-2-1+2=0$, for $3a < x < 4a$ lik $+1-2+1+2=+2$ og endelig for $4a < x$ lik $+1-2+1-2=-2$. Figur B passer fint med dette.

FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme I/Elektromagnetisme

Midtsemesterprøve onsdag 7. mars 2007 kl 1300 – 1500.

Fasit – Versjon A

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	21	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
10	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	23	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					