

Løsningsforslag, Midtsemesterprøve fredag 13. mars 2009 kl 1415 – 1615.

Fasit side 10.

Oppgavene med kort løsningsforslag (Versjon A)

1) Hvilken påstand er feil?

B Halvering av ladningen på ei metallkule halverer dens potensielle energi.

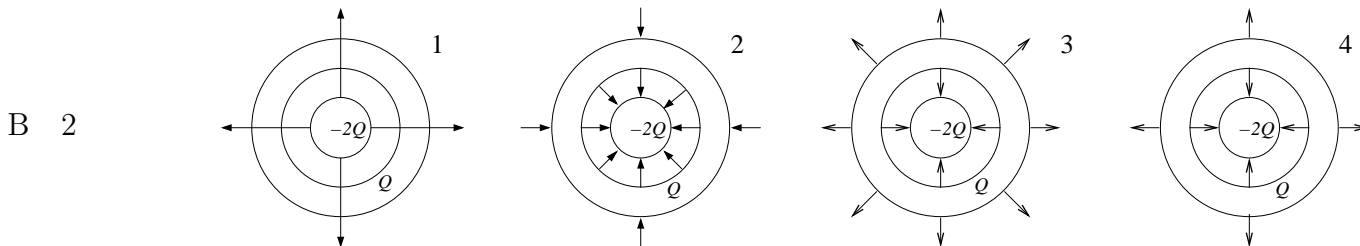
Ettersom  $U \sim Q^2$ , vil halvering av  $Q$  resultere i at potensiell energi  $U$  reduseres til fjerdeparten av den opprinnelige verdien. De andre påstandene er alle riktige. (Andel riktige svar: 52 %)

2) To punktladninger  $\pm q$  er plassert på  $z$ -aksen i  $z = \pm a$ . Hva blir netto elektrisk fluks gjennom  $xy$ -planet?

B  $q/\epsilon_0$

Alle feltlinjer starter på  $q$  i  $z = a$  og ender på  $-q$  i  $z = -a$ , så netto fluks gjennom  $xy$ -planet blir  $q/\epsilon_0$ . Alternativt: Fluks  $q/2\epsilon_0$  fra hver av de to punktladningene krysser  $xy$ -planet, "fra høyre mot venstre". (Andel riktige svar: 27 %)

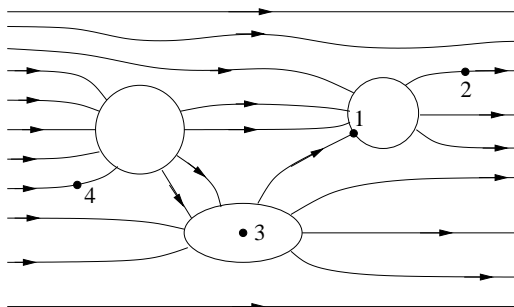
3) Figuren viser en metallkule med netto negativ ladning  $-2Q$  omgitt av et luftlag, etterfulgt av et metallisk kuleskall med netto positiv ladning  $Q$ . Hvilken figur angir da korrekt feltlinjene for  $\mathbf{E}$ ? (Tips: Gauss' lov.)



Bruk av Gauss' lov gir ladning  $-2Q$  på overflaten av kula i midten, ladning  $2Q$  på *indre* overflate av kuleskallet, og ladning  $-Q$  på *ytre* overflate av kuleskallet. Dermed blir elektrisk felt  $E(r) = -2Q/4\pi\epsilon_0 r^2$  i luftrommet mellom de to lederne og  $E(r) = -Q/4\pi\epsilon_0 r^2$  utenfor kuleskallet. (Dvs, begge steder rettet innover.) (Andel riktige svar: 90 %)

4) Figuren viser tre elektriske ledere og feltlinjer for det elektriske feltet i området omkring disse. Ranger potensialene  $V_j$  i de fire angitte posisjonene  $j = 1, 2, 3, 4$ .

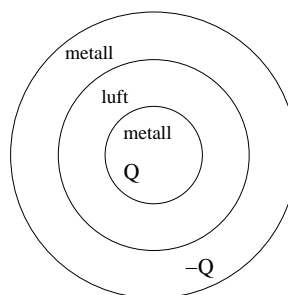
B  $V_4 > V_3 > V_1 > V_2$



Det elektriske feltet peker i retning fra høyt mot lavere potensial. (Andel riktige svar: 77 %)

5) Ei metallkule med ladning  $Q$  er omgitt av et luftlag, fulgt av et metallisk kuleskall med ladning  $-Q$ . Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?

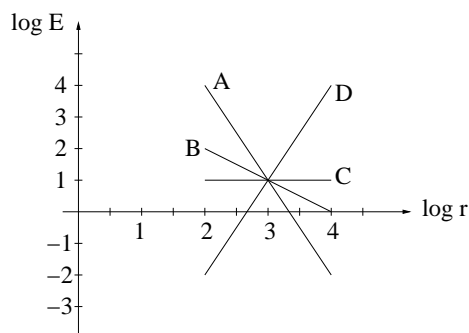
B 0



Gauss' lov gir ladning  $-Q$  på kuleskallets indre overflate, og dermed null ladning på ytre overflate. (Andel riktige svar: 85 %)

6) Hvilken graf viser  $\log E$  som funksjon av  $\log r$  i stor avstand  $r$  fra en elektrisk dipol?

A



Den elektriske feltstyrken avtar med avstanden opphøyd i 3. potens i stor avstand fra en elektrisk dipol, dvs  $E(r) = A/r^3$ . Dermed blir  $\log E = \log A - 3 \log r$ , dvs stigningstall  $-3$  dersom vi plotter  $\log E$  som funksjon av  $\log r$ . (Andel riktige svar: 55 %)

---

7) Omtrent hvor mye ladning har alle elektronene i kroppen din til sammen? (Anta at kroppen din inneholder omtrent like mange nøytroner som protoner.)

D noen GC

Siden elektronmassen er mye mindre enn proton- og nøytronmassen, kan vi se bort fra elektronmassen når antall protoner bestemmes. Med kroppsmasse  $M$  har vi

$$\begin{aligned} M &= N_e(m_p + m_n) = 2N_e m_p \\ \Rightarrow N_e &= M/2m_p \\ &= 75/2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \\ &\simeq 2 \cdot 10^{28} \end{aligned}$$

Her må alle likhetstegn oppfattes som "omtrent lik", og hvorvidt vi bruker en kroppsmasse på 75, 50 eller 100 kg spiller liten rolle for konklusjonen. Ladningen til samtlige elektroner blir

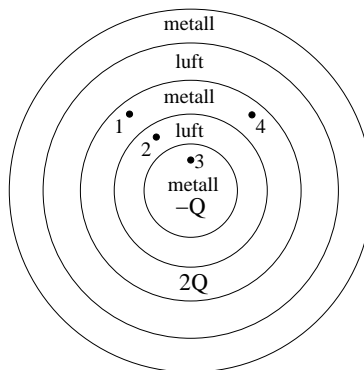
$$Q_e \simeq N_e \cdot e \simeq 2 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \simeq 3 \cdot 10^9$$

dvs noen gigacoulomb (GC). (Andel riktige svar: 64 %)

---

8) Ei metallkule med ladning  $-Q$  er omgitt av et luftlag, deretter et metallisk kuleskall med ladning  $2Q$ , deretter et luftlag, og endelig et metallisk kuleskall med null netto ladning. Hvor mye ladning befinner seg på det ytterste kuleskallets ytre overflate?

C  $Q$



Gauss' lov gir ladning  $-Q$  på ytre kuleskalls indre overflate, og dermed ladning  $Q$  på ytre kuleskalls ytre overflate. (Andel riktige svar: 68 %)

---

9) I figuren i forrige oppgave er det angitt fire posisjoner (1, 2, 3 og 4). Ranger potensialet i disse fire punktene.

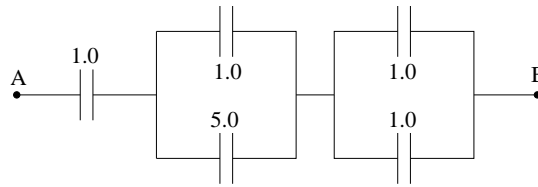
C  $V_1 = V_4 > V_2 > V_3$

I det innerste luftlaget er det elektriske feltet rettet innover. Dermed er  $V_3 < V_2 < V_1$ . Dessuten er 1 og 4 på samme kuleskall, dvs på samme ekvipotensial, og dermed er  $V_4 = V_1$ . (Andel riktige svar: 83 %)

---

10) Figuren viser en sammenkobling av fem kapasitanser med verdier i pF som angitt i figuren. Hva blir total kapasitans for hele sammenkoblingen, i enheten pF?

A 0.6



Formler for serie- og parallellkobling av kapasitanser gir

$$C = \left( \frac{1}{1.0} + \frac{1}{1.0 + 5.0} + \frac{1}{1.0 + 1.0} \right)^{-1} = 0.6 \text{ pF}$$

(Andel riktige svar: 85 %)

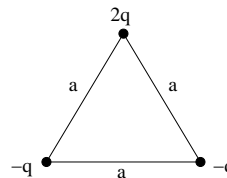
11) Anta at det mellom endepunktene A og B i forrige oppgave er en potensialforskjell på 100 V. Hvor mye ladning ( $\pm$ ) $Q$ , i enheten pC, befinner seg da på kondensatoren med kapasitans 5.0 pF?

D  $Q = 50$

Total kapasitans 0.6 pF betyr ladning  $\pm Q_0 = \pm 0.6 \cdot 100 = \pm 60$  pC på kondensatoren til venstre. Denne ladningen må videre fordele seg i forholdet 1:5 mellom øvre og nedre kondensator i parallellkoblingen i midten, dvs med 10 pC oppe og 50 pC nede. (Andel riktige svar: 54 %)

12) Tre punktladninger, en positiv ( $2q$ ) og to negative ( $-q$ ), er plassert i hvert sitt hjørne av en likesidet trekant med sidekanter  $a$ . Hva er systemets dipolmoment?

C  $\sqrt{3}qa$



Bruker  $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i$  med origo for eksempel midt på linjen mellom de to ladningene  $-q$ . Da blir  $p = 2q \cdot h$ , der  $h$  er høyden fra "grunnlinjen" opp til ladningen  $2q$ . Ser fra figuren at  $h = a \cos 30 = \sqrt{3}a/2$ , slik at  $p = \sqrt{3}qa$ . (Andel riktige svar: 61 %)

13) Hva er den potensielle energien til de tre ladningene i oppgave 12? (Dvs i forhold til om de tre ladningene var uendelig langt fra hverandre.)

A  $-3q^2/4\pi\epsilon_0 a$

$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} ((-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(Andel riktige svar: 73 %)

---

14) Hva er den elektriske feltstyrken i sentrum av trekanten i oppgave 12?

D  $9q/4\pi\epsilon_0 a^2$

Ser at feltet må peke nedover. Alle tre ladninger bidrar med vertikalkomponent nedover. Kan derfor se på bidragene fra  $2q$  og (to ganger)  $-q$ . Trenger avstanden  $d$  fra hjørnene til midten:

$$\begin{aligned}\cos 30 &= \frac{a/2}{d} \\ \Rightarrow d &= \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Dermed blir bidraget fra ladningen  $2q$ :

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{3})^2} = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Må multiplisere med faktor  $\cos 60$  for å få vertikalkomponenten av bidraget fra  $-q$ :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{3})^2} \cdot \cos 60 = \frac{3q/2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Totalt:

$$\frac{6q + 2 \cdot 3q/2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

(Andel riktige svar: 60 %)

---

15) To tynne konsentriske ledende kuleskall har radius hhv  $R$  og  $4R$ , og ladning hhv  $Q$  og  $-Q$ . Hvor mye energi er lagret i det elektriske feltet i volumet mellom de to kuleskallene?

B  $3Q^2/32\pi\epsilon_0 R$

Elektrisk feltstyrke mellom  $R$  og  $4R$  er  $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Dermed er energitettheten i dette området

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

Total energi lagret blir dermed

$$\begin{aligned}U_E &= \int u_E dV \\ &= \int_R^{4R} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

(Andel riktige svar: 52 %)

---

---

16) Hva er kapasitansen til kulekondensatoren i forrige oppgave?

D  $16\pi\epsilon_0 R/3$

Potensialforskjell mellom  $R$  og  $4R$ :

$$\Delta V = V(R) - V(4R) = - \int_{4R}^R E(r) dr = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0 R}$$

slik at kapasitansen blir

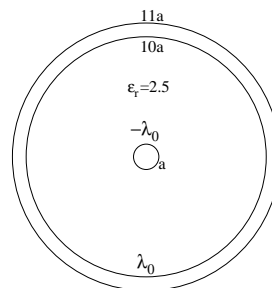
$$C = Q/\Delta V = 16\pi\epsilon_0 R/3$$

(Andel riktige svar: 61 %)

---

17) En koaksialkabel består av en indre leder med radius  $a$  og en ytre ”rørformet” leder med indre radius  $10a$  og ytre radius  $11a$ . Figuren viser et tverrsnitt gjennom kabelen, som kan antas å være rett og tilnærmet uendelig lang. Rommet mellom de to lederne ( $a < r < 10a$ ) består av et dielektrikum med relativ permittivitet 2.5. Anta at indre og ytre leder har ladning hhv  $-\lambda_0$  og  $\lambda_0$  pr lengdeenhet. Hvor er ladningen på indre og ytre leder lokalisert?

A Ved  $r = a$  og  $r = 10a$ .



Gauss' lov gir at ladningen  $-\lambda_0$  må ligge på senterlederens overflate (og av symmetrigrunner, jevnt fordelt der), dvs ved  $r = a$ , og videre at ladningen  $\lambda_0$  må ligge jevnt fordelt på ytre leders indre overflate, dvs ved  $r = 10a$ . (Andel riktige svar: 67 %)

---

18) Hva er den elektriske feltstyrken  $E(r)$  i området  $a < r < 10a$  for koaksialkabelen i oppgave 17?

A  $\lambda_0/5\pi\epsilon_0 r$

Gauss' lov med sylinder med radius  $r$  og lengde  $L$  som gaussflate gir

$$D(r) \cdot 2\pi r \cdot L = -\lambda_0 \cdot L$$

dvs

$$D(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

i området mellom de to lederne. Her betyr minustegnet at feltene peker innover. Dermed, siden  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , har vi

$$E(r) = D(r)/\epsilon = -\frac{\lambda_0}{5\pi\epsilon_0 r}$$

Feltstyrken definerer vi som vanlig uten fortegn, dermed alternativ A. (Andel riktige svar: 43 %)

---

---

19) Hvor stor er kapasitansen pr lengdeenhet for koaksialkabelen i oppgave 17?

D 60 pF/m

Potensialforskjell mellom de to lederne:

$$\Delta V = V(10a) - V(a) = - \int_a^{10a} E(r) dr = \frac{\lambda_0}{5\pi\epsilon_0} \int_a^{10a} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_0 \ln 10}{5\pi\epsilon_0}$$

Ettersom  $\lambda_0$  nettopp er ladning *pr lengdeenhet*, blir kapasitansen pr lengdeenhet

$$\frac{\lambda_0}{\Delta V} = \frac{5\pi\epsilon_0}{\ln 10} \simeq 60 \text{ pF/m}$$

(Andel riktige svar: 38 %)

---

20) En lang tynn tråd ligger langs  $x$ -aksen og har ladning

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha x}$$

pr lengdeenhet. Her er  $\lambda_0$  og  $\alpha$  konstanter. Anta at tråden kan regnes som uendelig lang. Hva blir da trådens dipolmoment?

D  $2\lambda_0/\alpha^2$

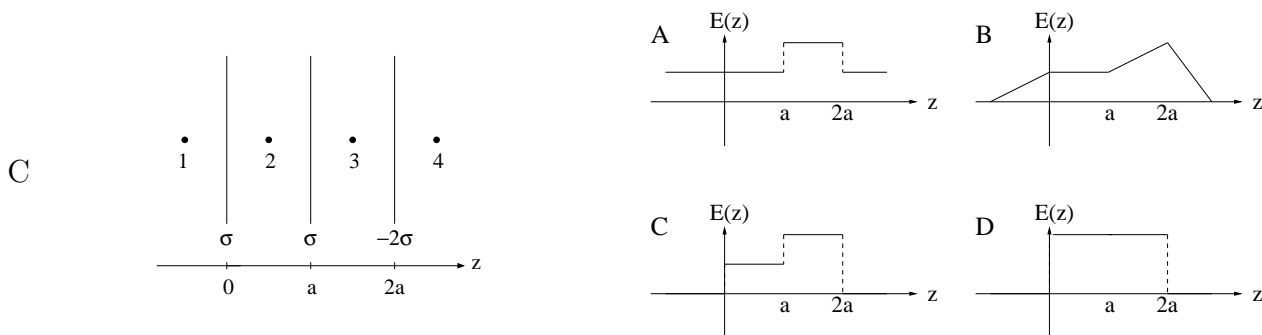
Ser at  $\mathbf{p}$  må peke i  $x$ -retning. Dermed:

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda(x) dx = \frac{\lambda_0}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} dx = \frac{2\lambda_0}{\alpha} \Big|_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha x} = \frac{2\lambda_0}{\alpha^2}$$

(Andel riktige svar: 55 %)

---

21) Tre store parallelle plan har innbyrdes avstand  $a$  som vist i figuren nedenfor, til venstre. Planene har ladning pr flateenhet  $\sigma$ ,  $\sigma$ , og  $-2\sigma$  (fra venstre mot høyre, og  $\sigma > 0$ ). Det elektriske feltet kan skrives på formen  $\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{z}$ . Hvilken figur (nedenfor, til høyre) viser korrekt  $E(z)$ ?



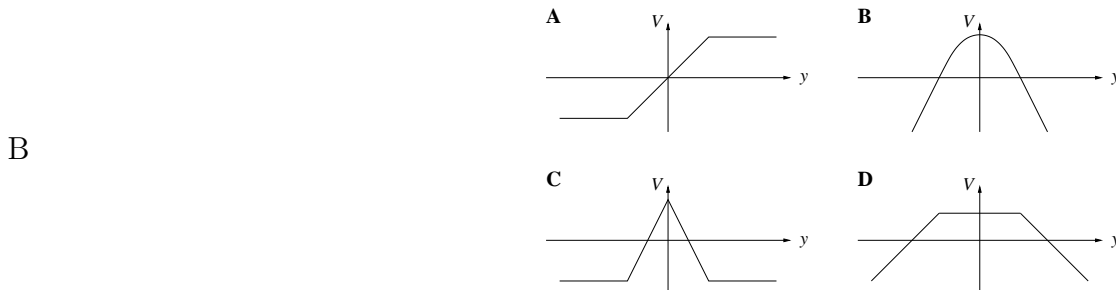
Plan med ladning  $\sigma$  pr flateenhet gir elektrisk felt  $E = -\sigma/2\epsilon_0$  til venstre for planet og  $+\sigma/2\epsilon_0$  til høyre for planet, mens plan med ladning  $-2\sigma$  pr flateenhet gir elektrisk felt  $E = +2\sigma/2\epsilon_0$  til venstre for planet og  $-2\sigma/2\epsilon_0$  til høyre for planet. Dermed er det bare å legge sammen bidragene fra de tre planene. Det gir  $E = 0$  for  $z < 0$  og for  $z > 2a$ ,  $E = \sigma/\epsilon_0$  for  $0 < z < a$  og  $E = 2\sigma/\epsilon_0$  for  $a < z < 2a$ . Dermed graf C. (Andel riktige svar: 69 %)

22) Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene merket med 1, 2, 3 og 4 i figuren til venstre i forrige oppgave.

A  $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$

Fra forrige oppgave har vi at  $V$  er konstant for  $z < 0$ , at  $V$  avtar lineært mellom  $z = 0$  og  $z = a$ , at  $V$  avtar (raskere...!) lineært mellom  $z = a$  og  $z = 2a$ , og at  $V$  er konstant for  $z > 2a$ . Dermed:  $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$ . (Andel riktige svar: 45 %)

23) Ei skive med uniform ladning  $\rho_0$  pr volumenhet har uendelig utstrekning i  $x$ - og  $z$ -retning og fyller rommet mellom  $y = -d$  og  $y = d$ . Hvilken graf viser korrekt potensial  $V(y)$ ?

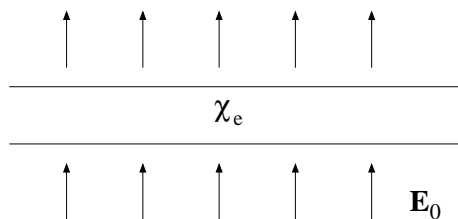


Gauss' lov gir  $E(y) = \rho_0 y/\epsilon_0$  inne i skiva,  $E = -\rho_0 d/\epsilon_0$  til venstre for skiva, og  $E = \rho_0 d/\epsilon_0$  til høyre for skiva. Her er  $\mathbf{E} = E \hat{y}$ . Dermed har vi at potensialet øker lineært for  $y < -d$ , avtar lineært for  $y > d$ , og er proporsjonalt med  $-y^2$  for  $|y| < d$ . Dette passer fint med graf B. (Mens graf A passer med  $E(y)$ .) (Andel riktige svar: 28 %)



24) Ei tilnærmet uendelig stor dielektrisk skive plasseres på tvers i et uniformt ytre elektrisk felt  $\mathbf{E}_0$ . Skiva er produsert i et materiale med elektrisk susceptibilitet  $\chi_e$ . Hva blir induisert ladning  $\pm\sigma_i$  pr flateenhet på overflatene til den dielektriske skiva?

C  $\varepsilon_0 E_0 / (1 + \chi_e^{-1})$

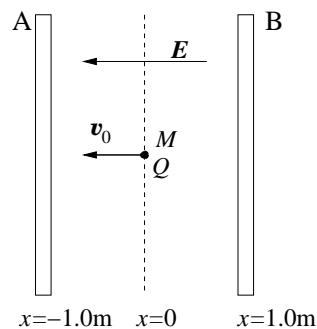


$$\begin{aligned} \sigma_i &= |\mathbf{P}| = \chi_e \varepsilon_0 E = \chi_e \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \chi_e \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon_r} \\ &= \frac{\chi_e}{\chi_e + 1} \varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{1 + \chi_e^{-1}} \end{aligned}$$

(Andel riktige svar: 10 %)

25) To tilnærmet uendelig store parallelle metallplater A og B er plassert i henholdsvis  $x = -1.0$  m og  $x = 1.0$  m som vist i figuren nedenfor. Et uniformt elektrisk felt mellom platene på 20 kV/m (i negativ  $x$ -retning) er generert av ladning på metallplatene. Et oksygenion med masse  $M = 16m_p$  og ladning  $Q = -2e$  starter i  $x = 0$  med hastighet  $v_0 = 5.0 \cdot 10^4$  m/s i negativ  $x$ -retning. Hva blir dette ionets skjebne?

C Det treffer høyre plate med hastighet  $6.9 \cdot 10^5$  m/s.



Kinetisk energi i starten:

$$T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 = 208.75 \text{ eV} \simeq 0.2 \text{ keV}$$

Forskjell i potensiell energi for ionet ved  $x = -1$  m og ved  $x = 0$ :

$$U(-1) - U(0) = (-2e) \cdot (-20 \text{ kV}) = 40 \text{ keV}$$

Dette betyr at ionet snur lenge før det treffer venstre plate. Når det igjen passerer ved  $x = 0$ , vil det pga energibevarelse fortsatt ha kinetisk energi  $T_0$ . Fra  $x = 0$  til  $x = 1$  m endres ionets potensielle energi med -40 keV. Pga energibevarelse har det derfor en kinetisk energi  $T_1 = 40.2 \text{ keV}$  når det treffer høyre plate. Dette tilsvarer en hastighet

$$v_1 = \sqrt{2T_1/M} \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

(Andel riktige svar: 55 %)

## FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme/Elektromagnetisme

Midtsemesterprøve fredag 13. mars 2009 kl 1415 – 1615.

### Fasit (Versjon A)

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	15	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	22	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	23	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					