NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I 74310 KVANTEMEKANIKK 1

Tirsdag 23. mai 2000
kl. 09.00 - 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

En side med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 13. juni 2000.

Oppgave 1

a) Hva er uttrykket $\langle F \rangle$ for forventningsverdien (middelverdien) av en fysisk størrelse F når systemets bølgefunksjon er $\Psi(\vec{r}, t)$?

Skriv ned relasjonen som en hermitesk operator $\widehat{F}$ må tilfredsstille.

En fysisk størrelse må representeres ved en hermitesk operator. Hvorfor?

b) Bevis kommutatorrelasjonen

$$\left[\widehat{p}_x^2, x\right] = -2i\hbar\, \widehat{p}_x.$$

Oppgave 2

En partikkel med masse m befinner seg mellom to ugjennomtrengelige vegger i $x = 0$ og $x = L$. De stasjonære tilstandene er

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

med tilhørende energiegenverdier

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}.$$

Ved $t = 0$ er partikkelens normerte bølgefunksjon

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{256}{63L}} \sin^5 \frac{\pi x}{L}.$$

Hvis partikkelens energi måles, hva er de mulige resultatene, og og med hvilke sannsynligheter p_n finnes disse verdier?

Tips: Det er nyttig å vite at

$$\sin^5 v = \frac{1}{16} \left[10 \sin v - 5 \sin(3v) + \sin(5v) \right].$$

Oppgave 3

a) Bruk heve- og senkeoperatorer til å beregne forventningsverdiene (middelverdiene)

$$\langle q^2 \rangle \qquad \text{og} \qquad \langle q^4 \rangle$$

for en partikkel med masse m i grunntilstanden i harmonisk-oscillator-potensialet $V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$.

b) En partikkel med masse m beveger seg i én dimensjon og tiltrekkes til origo med en kraft proporsjonal avstanden, men med ulike kraftkonstanter på høyre og venstre side. Potensialet er

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} m c^2 \omega^2 q^2 & \text{for } q \leq 0 \\ \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 & \text{for } q \geq 0 \end{cases}$$

Vi skal i resten av oppgaven se på grunntilstandsenergien $E_0(c)$ i dette asymmetriske potensialet, som funksjon av den positive parameteren c.

Hva er $E_0(1)$? Hva er $E_0(\infty)$? (Begrunn svaret)

Finn hvorledes $E_0(c)$ avhenger av c for ekstremt små verdier av c.
(Tips: Innfør $\omega = \widehat{\omega}/c$ og la deretter $c \to 0$ for fast $\widehat{\omega}$.)

c) I Rayleigh-Schrödinger tidsuavhengig perturbasjonsteori løses egenverdiproblemet $\widehat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, der $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda\widehat{H}_1$, ved rekkeutvikling i parameteren λ:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots \\ |\psi_n\rangle &= |n\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2|n^{(2)}\rangle + \ldots \end{aligned}$$

Løsningen av det uperturberte problemet, $\widehat{H}_0|n\rangle = E_n^0|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forutsettes kjent, og det forutsettes at egenverdiene E_n^0 ikke er degenererte.

Vis at til første orden er egenverdiene gitt ved

$$E_n = E_n^0 + \lambda\langle n|\widehat{H}_1|n\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

d) For c nær 1 er potensialet i punkt b) nær et vanlig symmetrisk harmonisk-oscillator-potensial. Sett $c = 1 + \lambda$, og beregn $E_0(c)$ til første orden i λ.

Bruk det du har funnet i punktene b) og d) til å skissére $E_0(c)/(\hbar\omega)$ som funksjon av c.

Oppgave 4

a) Vis at energiegenverdien E_0 i grunntilstanden for en partikkel i et éndimensjonalt potensial $V(z)$ aldri er større enn Rayleigh-Ritz-estimatet

$$E_{RR} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(z)\widehat{H}f(z)\,dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\,dz}$$

for enhver normerbar funksjon $f(z)$. $\widehat{H}$ er Hamiltonoperatoren. (Tips: Utvikl f i de ortonormerte egenfunksjonene til $\widehat{H}$.)

b) Bruk variasjonsmetoden med prøvefunksjon

$$f(z) = \begin{cases} ze^{-\frac{1}{2}\alpha z^2} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

til å gi det best mulige Rayleigh-Ritz-estimat av grunntilstandsenergien E_0 for en partikkel med masse m i det triangulære potensialet

$$V(z) = \begin{cases} Fz & \text{for } z \geq 0 \\ \infty & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Harmonisk oscillator

De to laveste energiegentilstandene har følgende energiverdier og posisjonsbølgefunksjoner:

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega \qquad \langle q|0\rangle = \psi_0(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$E_1 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega \qquad \langle q|1\rangle = \psi_1(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2xe^{-\frac{1}{2}x^2},$$

der $x \equiv q\sqrt{m\omega/\hbar}$.

Uttrykt ved posisjons- og impuls-operatorene er senke- og heveoperatorene (annilasjons- og skapelsesoperatorene) definert ved

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \end{aligned}$$

Disse stigeoperatorene har egenskapene

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^\dagger &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \end{aligned}$$

der $|n\rangle$ er egentilstand nr. n. All tidsavhengighet er neglisjert.

Integraler

$$I_n = \int_0^\infty z^n e^{-\alpha z^2}\, dz = c_n\, \alpha^{-(n+1)/2},$$

der tallene c_n er

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\pi}$	1	$\frac{15}{16}\sqrt{\pi}$	3