NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67

EKSAMEN I
TFY4250 ATOM- OG MOLEKYLFYSIKK og
FY2045 KVANTEFYSIKK

Tirsdag 7. desember 2004
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt.
Sensuren faller 4. januar 2005.

Oppgave 1

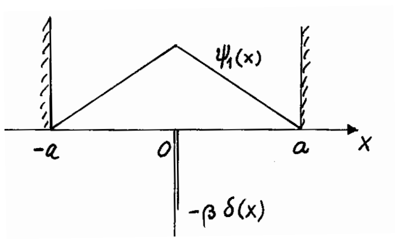
En partikkel med masse m beveger seg i et symmetrisk éndimensjonalt potensial, $V(x) = V(-x)$.

a. Anta at $\psi(x)$ er en energiegenfunksjon med energi E. Begrunn (med utgangspunkt i den tidsuavhengige Schrödingerligningen for dette systemet) hvordan $\psi(x)$ *krummer*

(i) i klassisk *tillatte* områder, hvor $V(x) < E$,
(ii) i klassisk *forbudte* områder, hvor $V(x) > E$,
(iii) i (eventuelle) *områder* hvor $V(x) = E$.

Hva kan du si om symmetriegenskaper for bundne energiegentilstander i et symmetrisk éndimensjonalt potensial? (Bevis kreves ikke.)

b.



Figuren viser et éndimensjonalt boks-potensial med en δ-brønn i midten,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for} \quad |x| > a, \\ -\beta\delta(x) & \text{for} \quad |x| < a. \end{cases}$$

"Styrken" (β) til δ-brønnen er valgt slik at energiegenfunksjonen for grunntilstanden blir

$$\psi_1(x) = \psi_1(0)(1 - |x|/a) \qquad (-a < x < a).$$

Hva er energien E_1 for denne tilstanden?

Ved å integrere den tidsuavhengige Schrödingerligningen kan en vise at energiegenfunksjonene for dette potensialet må oppfylle betingelsen

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = \frac{2m(-\beta)}{\hbar^2}\,\psi(0).$$

Bruk denne betingelsen til å finne β uttrykt ved de oppgitte størrelsene.

c. Energiegentilstanden $\psi_2(x)$ for 1. eksiterte tilstand i dette potensialet er antisymmetrisk. Finn $\psi_2(x)$ og den tilhørende energien E_2. Kontrollér at $\psi_2(x)$ oppfyller betingelsen under pkt. **b**.

d. Skissér kvalitativt bølgefunksjonen $\psi_3(x)$ for 2. eksiterte tilstand i dette potensialet. Er den tilhørende energien E_3 høyere eller lavere enn den tilsvarende energien for tilfellet $\beta = 0$?

Oppgave 2

En partikkel med masse m beveger seg i et kulesymmetrisk brønnpotensial

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \le r < a, \\ V_0 & \text{for} \quad r > a. \end{cases}$$

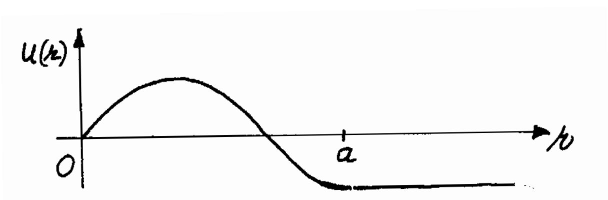
Dette potensialet har energiegenfunksjoner på formen

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{u_l(r)}{r}\, Y_{lm}(\theta,\phi),$$

der $u_l(r)$ oppfyller radialligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right] u_l(r) = E\, u_l(r) \qquad \Big(u_l(r) \sim r^{l+1} \text{ for små } r\Big).$$

a. Med et passende valg av brønndybden V_0 kan en oppnå at en bestemt radialfunksjon for $l = 0$ tar formen



(med ett nullpunkt for $0 < r < a$). Det opplyses at denne funksjonen går mot null for store r, men ekstremt langsomt. Bruk radialligningen til å finne *formen* på denne funksjonen for $r > a$, og bestem energien E til denne tilstanden.

b. Bestem formen til funksjonen $u(r)$ (i pkt. **a**) for $0 \le r < a$. Finn dybden V_0 av brønnen, uttrykt ved m og a.

c. Hvor mange *flere* løsninger med $E < V_0$ har radialligningen ovenfor for $l = 0$? (Begrunn svaret.) Lag raske prinsippskisser av slike (eventuelle) tilleggsløsninger $u(r)$, og forklar hvordan energien(e) kan finnes (uten å gjennomføre beregningen).

d. Skissér det "effektive potensialet" i radialligningen for $l = 1$. Argumentér for at antall løsninger $u(r)$ som svarer til bundne tilstander (for $l = 1$) er mindre enn for $l = 0$. Har det aktuelle potensialet bundne tilstander for $l \geq 5$? [Hint: Se nærmere på det effektive potensialet.]

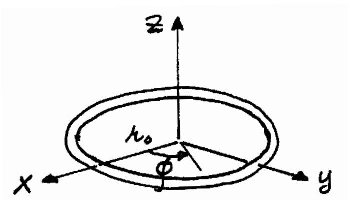
Oppgave 3

a. Energiegenfunksjonene for en todimensjonal kvadratisk boks med sidekant L kan skrives på formen

$$\psi_{n_x n_y} = A \sin(n_x \pi x/L) \sin(n_y \pi y/L) \qquad (0 < x < L,\, 0 < y < L).$$

I denne boksen plasserer vi 20 identiske spinn-$\frac{1}{2}$-partikler med masse m. Hva er den maksimale énpartikkelenergien $E_{n_x n_y}$ når partiklene har så lav *total* energi som mulig? (Begrunn svaret.)

b.



En partikkel med masse m beveger seg i et tynt rør som er bøyd sammen til sirkulær form, med radius r_0 (se figuren). Se bort fra bevegelsen på tvers av rørtverrsnittet. Anta at dette systemet er preparert i en tilstand beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2\phi.$$

Vis at denne er en egentilstand til Hamilton-operatoren $\hat{H} = \hat{L}_z^2/(2mr_0^2)$, og bestem energien. Angi de mulige måleverdiene ved en måling av observabelen L_z for partikkelen, og finn sannsynlighetene for disse måleverdiene i den aktuelle tilstanden. Hva kan du si om tilstanden *etter* en slik måling?

c. Vis at spinorene $\chi_{\pm\hat{\mathbf{y}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ er egentilstander til $S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ og bestem egenverdiene. Anta at en måling av S_y for en spinn-$\frac{1}{2}$-partikkel etterlater spinnet i tilstanden $\chi_{\hat{\mathbf{y}}}$. Hva er da sannsynligheten for at en påfølgende måling av S_x gir resultatet $S_x = \frac{1}{2}\hbar$ og etterlater spinnet i tilstanden

$$\chi_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ?}$$

Vedlegg: Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Sfæriske harmoniske

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{\mathbf{L}}^2\\ \hat{L}_z\end{array}\right\}Y_{lm}=\left\{\begin{array}{l}\hbar^2 l(l+1)\\ \hbar m\end{array}\right\}Y_{lm}\,;\qquad \int Y^*_{l'm'}Y_{lm}d\Omega=\delta_{l'l}\delta_{m'm};\qquad \hat{L}_z=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi};$$

$$Y_{00}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,,\qquad Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta\,,\qquad Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{\pm i\phi}.$$

Utvikling i ortonormert egenfunksjonssett

$$\psi=\sum_n c_n\psi_n,\qquad \langle\,\psi_k,\psi_n\,\rangle=\delta_{nk},\qquad c_n=\langle\,\psi_n,\psi\,\rangle\,.$$