NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67, eller 97012355

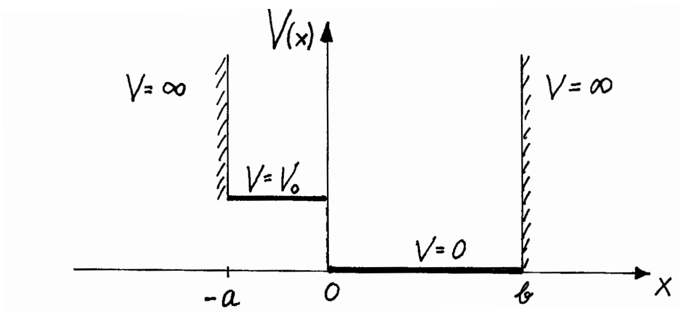
EKSAMEN I
FY2045 KVANTEFYSIKK

Onsdag 30. mai 2007
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt. Sensuren faller i juni 2007.

Oppgave 1



En partikkel med masse m befinner seg i et éndimensjonalt potensial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad -a < x < 0 \qquad (a > 0), \\ 0 & \text{for} \quad 0 < x < b, \qquad (0 \le b < \infty), \\ \infty & \text{for} \quad x < -a \;\text{ og }\; \text{for } x > b. \end{cases}$$

Her er $V_0 = \hbar^2/(2ma^2)$. I denne oppgaven tenker vi oss at lengden a (og dermed V_0) holdes fast, mens lengden b kan varieres mellom null og uendelig. Vi vil fokusere spesielt på oppførselen til grunntilstanden $\psi_1(x)$ og den tilhørende energien E_1, for varierende verdier av b.

a. •Se først på grensetilfellet $b = 0$. Finn grunntilstanden $\psi_1(x)$ og bestem dennes energi E_1 for dette tilfellet. •Hva skjer med grunntilstandsenergien E_1 når b går mot uendelig?

b. Anta nå at $b > 0$. •Forklar hvorfor grunntilstanden må ha formen

$$\psi_1(x) = A \sin[k_1(x-b)] \quad \text{for} \quad 0 < x < b.$$

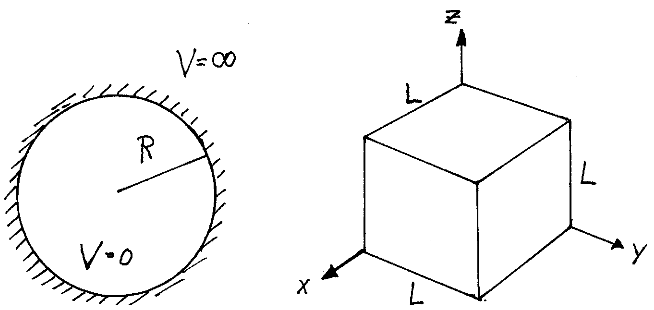
•Hvorfor må vi ha $k_1 b < \pi$?

c. For tilstrekkelig store verdier av b blir grunntilstandsenergien E_1 mindre enn V_0. Anta at b har en slik verdi. •Hvordan *krummer* da $\psi_1(x)$ i området $-a < x < 0$? •Lag en skisse av hele bølgefunksjonen $\psi_1(x)$ for et slikt tilfelle. •Forklar hvorfor bølgelengden $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ for slike verdier av b må oppfylle ulikheten

$$b < \lambda_1/2 < a + b.$$

d. For én bestemt verdi av b vil grunntilstandsenergien E_1 bli akkurat lik V_0. •Finn denne verdien av b, og skissér $\psi_1(x)$ for dette tilfellet. •Hvor stor må b være for at første eksiterte tilstand, $\psi_2(x)$, skal få energien $E_2 = V_0$?

Oppgave 2



En partikkel med masse μ beveger seg i en tredimensjonal "kvanteprikk", i form av et kuleformet bokspotensial, med $V = 0$ innenfor radien R og $V = \infty$ utenfor. (Se figuren til venstre ovenfor.) Dette systemet har energiegenfunksjoner på formen

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta,\phi),$$

der radialfunksjonen avhenger av dreieimpulskvantetallet l og radialkvantetallet n_r (som pr definisjon er antallet nullpunkter i radialfunksjonen i intervallet $0 < r < R$).

a. •Argumentér for at grunntilstanden i dette potensialet beskrives av en energiegenfunksjon med $l = 0$ (altså en s-bølge) og med $n_r = 0$. [Hint: Funksjonen $u(r)$ oppfyller en "éndimensjonal" radialligning, som du finner på formelarket.] •Finn denne energiegenfunksjonen og den tilhørende energiegenverdien.

b. Betrakt en alternativ kvanteprikk, der den samme partikkelen med masse μ befinner seg i en kubisk boks, med samme volum $V_0 = L^3$ som kula ovenfor (dvs slik at $V_0 = L^3 = 4\pi R^3/3$). •Finn forholdet mellom grunntilstandsenergiene i kuben og kula, og avgjør på den måten i hvilken av de to kvanteprikkene "kvantevillskapen" er størst.

c. Anta nå at volumet $V_0 = L^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ av de to kvanteprikkene kan regnes for å være makroskopisk, og at hvert av dem inneholder et stort antall N av ikke-vekselvirkende spinn-$\frac{1}{2}$-partikler med masse μ. Anta videre at de to mangepartikkelsystemene (i kula og kuben) begge er i grunntilstanden. •Hva er da den maksimale én-partikkel-energien i de to volumene? •Finn den maksimale én-partikkel-energien i elektronvolt, når $N/V_0 = 10^{23}\text{cm}^{-3}$ og $\mu = m_e$.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på spinntilstanden for en partikkel med spinn $\frac{1}{2}$.

a. •Vis at en vilkårlig spinor $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en egenspinor til S_x^2, S_y^2, S_z^2 og $\mathbf{S}^2$, og angi egenverdiene.

•Forklar med utgangspunkt i egenverdien for $\mathbf{S}^2$ hva vi mener med å si at partikkelen har spinn $\frac{1}{2}$.

•Angi de mulige måleresultatene ved målinger av S_x, S_y og S_z på en slik tilstand χ. (Bare én av de tre observablene måles om gangen.)

•Hva mener vi med å si at observablene S_x, S_y og S_z ikke er kompatible?

b. •Vis at de to spinorene

$$\chi_{\pm\hat{\mathbf{y}}} \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

begge er egenspinorer til S_y og bestem egenverdiene. (Se formel-arket.) •Vis også at de to spinorene er normerte.

c. Anta nå at dette spinnet prepareres i tilstanden

$$\chi = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}(1+i) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•Vis at χ er normert. •Hva er den fysiske tolkningen av koeffisientene a og b?

d. •Hva er de mulige måleresultatene ved en måling av S_y, og hva er sannsynlighetene for disse, når spinnet før målingen befinner seg i tilstanden χ oppgitt i pkt. **c**?

Vedlegg: Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Éndimensjonal boks, $V(x) = 0$ **for** $0 < x < L$, **uendelig utenfor**

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Radialligning for kulesymmetrisk potensial $V(r)$

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta,\phi);$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right] u = Eu; \qquad u(0) = 0.$$

Laplace-operatoren og dreieimpulsoperatorer i kulekoordinater

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2 r^2}, \qquad \hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right),$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 \;\; (i = x,y,z), \qquad [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad \text{etc.}$$

Sfæriske harmoniske

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{\mathbf{L}}^2\\ \hat{L}_z\end{array}\right\} Y_{lm} = \left\{\begin{array}{l}\hbar^2 l(l+1)\\ \hbar m\end{array}\right\} Y_{lm}\;; \qquad \int Y^*_{l'm'}Y_{lm}d\Omega = \delta_{l'l}\delta_{m'm}; \qquad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi};$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}.$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}.$$

Noen fysiske konstanter

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{m_e c} = 0.529\times10^{-10}\text{m}; \qquad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036};$$

$$c = 2.998\times10^8\text{m/s}; \qquad \hbar = 0.6582\times10^{-15}\text{eVs}; \qquad m_e = 0.5110\ \text{MeV/c}^2.$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \approx 13.6\ \text{eV}.$$

Antall romlige énpartikkeltilstander i faserom-element $V_0 d^3p$

$$dN_{\text{rom}} = \frac{V_0 d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Spinn $\frac{1}{2}$

For en partikkel med spinn $\frac{1}{2}$ kan en bruke spinnoperatoren

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} = \tfrac{1}{2}\hbar(\hat{\mathbf{e}}_x\sigma_x + \hat{\mathbf{e}}_y\sigma_y + \hat{\mathbf{e}}_z\sigma_z),$$

der

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

er de såkalte Pauli-matrisene. Pauli-*spinorene* $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er da egentilstander til $S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ med egenverdiene $\pm\frac{1}{2}\hbar$. En normert spinntilstand $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan karakteriseres ved spinnretningen,

$$\langle\, \boldsymbol{\sigma}\, \rangle = \chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi = \hat{\mathbf{e}}_x\, \Re\mathrm{e}(2a^*b) + \hat{\mathbf{e}}_y\, \Im\mathrm{m}(2a^*b) + \hat{\mathbf{e}}_z\, (|a|^2 - |b|^2).$$

Matrisene $S_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x$ osv oppfyller dreieimpulsalgebraen,

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

Videre er

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$