NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67, eller 97012355

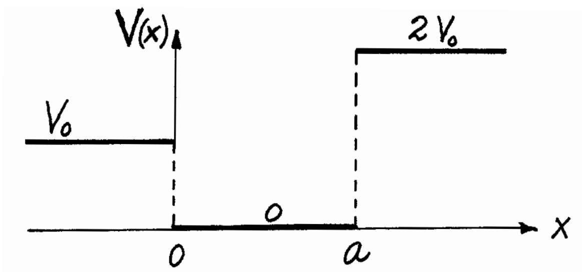
EKSAMEN I
FY2045 KVANTEFYSIKK

Mandag 2. juni 2008
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt. Sensuren faller i juni 2008.

Oppgave 1



En partikkel med masse m befinner seg i et endimensjonalt asymmetrisk brønnpotensial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad -\infty < x < 0, \qquad (V_0 > 0) \\ 0 & \text{for} \quad 0 < x < a, \\ 2V_0 & \text{for} \quad a < x < \infty. \end{cases}$$

Brønnvidden a er valgt slik at 1. eksiterte tilstand ψ_2 for dette systemet er lik en konstant for $x < 0$:

$$\psi_2(x) = C \quad \text{for} \quad -\infty < x < 0.$$

a. •Bruk den tidsuavhengige Schrödingerligningen til å finne den *relative krumningen*, ψ''/ψ, for *alle* energiegenfunksjoner $\psi(x)$, uttrykt ved energien E og potensialet $V(x)$. •Vis ut fra opplysningene ovenfor at energien for 1. eksiterte tilstand er $E_2 = V_0$. •Hvordan krummer ψ_2 i områdene $0 < x < a$ og $a < x < \infty$? •Angi uten bevis antall nullpunkter for ψ_2. Den generelle løsningen av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for området $-\infty < x < 0$ er egentlig $\psi_2 = Bx + C$. •Hvorfor må vi ha $B = 0$, som fastslått innledningsvis?

b. •Hvilke kontinuitetsbetingelser må ψ_2 oppfylle? •Vis at ψ_2 må ha formen $C\cos kx$ i området $0 < x < a$, og finn k uttrykt ved de oppgitte størrelsene. •Vis også at ψ_2 må ha formen $De^{-\kappa x}$ for $x > a$, og bestem κ uttrykt ved de oppgitte størrelsene.

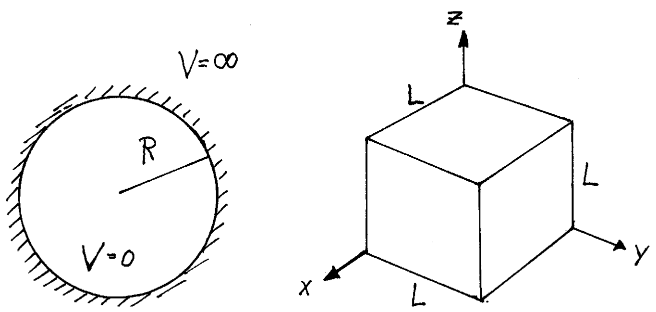
c. •Forklar hvorfor eventuelle nullpunkter for $\psi_2(x)$ må ligge i brønnområdet. •Lag en omtrentlig skisse av energiegenfunksjonen $\psi_2(x)$, ut fra det du nå vet. •Finn brønnvidden a, uttrykt ved de oppgitte størrelsene.

d. *Grunntilstanden* ψ_1 for dette potensialet kan i brønnområdet skrives på formen

$$A\cos[k_1(x-b)].$$

•Finn k_1 uttrykt ved energien (E_1). •Finn også formen til ψ_1 i områdene $-\infty < x < 0$ og $a < x < \infty$. •Lag en omtrentlig skisse av ψ_1. •Finn til slutt et sett av betingelser som vil gjøre det mulig å bestemme energien E_1.

Oppgave 2



En partikkel med masse μ beveger seg i en tredimensjonal "kvanteprikk", i form av et kuleformet bokspotensial, med potensial

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \le r < R, \\ \infty & \text{for} \quad r > R. \end{cases}$$

(Se figuren til venstre ovenfor.) Dette systemet har energiegenfunksjoner på formen

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{u(r)}{r}\,Y_{lm}(\theta,\phi).$$

For et gitt dreieimpulskvantetall l oppfyller radialfunksjonen $u(r)$ en radialligning på "endimensjonal" form,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]u = Eu; \qquad u(0) = 0,$$

hvor $V(r) + \hbar^2 l(l+1)/(2\mu r^2) \equiv V^l_{\text{eff}}(r)$ spiller rollen som et effektivt potensial.

a. •Argumentér for at grunntilstanden i dette potensialet beskrives av en energiegenfunksjon med $l = 0$ (altså en s-bølge) og med radialkvantetall $n_r = 0$. (Radialkvantetallet er her pr definisjon antallet nullpunkter til $u(r)$ i intervallet $0 < r < R$.) •Finn denne energiegenfunksjonen, og den tilhørende energiegenverdien (E_R) uttrykt ved R.

b. Betrakt en alternativ kvanteprikk, der den samme partikkelen med masse μ befinner seg i en kubisk boks, med volum $V_L = L^3$. Her er L valgt slik at grunntilstandsenergien blir den samme som for den kuleformede boksen. •Finn grunntilstandsenergien (E_L) for den kubiske boksen uttrykt bl.a ved sidekanten L. •Hvor stort må forholdet mellom det kubiske volumet V_L og kulevolumet $V_R = 4\pi R^3/3$ være for at de to grunntilstandsenergiene E_R og E_L skal bli like store?

c. Anta nå at den kuleformede boksen inneholder et stort antall N av (ikke-vekselvirkende) nøytroner med masse m_n og spinn $\frac{1}{2}$. Anta videre at dette mangepartikkelsystemet har så lav total energi som mulig, dvs er i grunntilstanden for dette systemet. •Vis at den maksimale nøytron-energien (én-partikkel-energien) kan skrives på formen

$$E_F = f\,\frac{\hbar^2}{2m_nR^2} = f\,\frac{\hbar^2}{2m_ea_0^2}\,\frac{m_e}{m_n}\left(\frac{a_0}{R}\right)^2,$$

der faktoren f er dimensjonsløs, og finn denne faktoren f. (Regn ikke-relativistisk.) •Finn energien E_F i megaelektronvolt (MeV), når det oppgis at $m_n = 1840\,m_e$, $R = 7\cdot 10^{-15}$ m og $N = 150$.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på et elektronspinn $\mathbf{S}$, plassert i et magnetfelt $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$. Elektronets indre magnetiske moment representeres av operatoren

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{ge}{2m_e}\mathbf{S}, \qquad g \approx 2.00232.$$

Oppførselen til spinnet bestemmes da av Hamilton-operatoren

$$\widehat{H} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \equiv \omega S_z, \qquad \omega \equiv \frac{geB}{2m_e}.$$

a. •Vis at de to Pauli-spinorene χ_+ og χ_- da er energiegentilstander, og finn de to energiene, E_+ og E_-, uttrykt ved ω. [Se formelarket.] •Finn E_+ og E_- i elektronvolt (eV) når $B = 2$ T(esla). Det oppgis at

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e} \equiv 1 \text{ Bohr-magneton} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T(esla)}.$$

•Finn bølgelengden λ til fotonene som er inne i bildet ved overganger mellom de to energiegentilstandene.

b. Ved en måling ved $t = 0$ etterlates spinnet i tilstanden

$$\chi(t=0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Den resulterende tilstanden for $t > 0$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de stasjonære tilstandene for dette systemet;

$$\chi(t) = c_+\chi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + c_-\chi_- e^{-iE_-t/\hbar}.$$

•Hva er c_+ og c_-? •Skriv denne tilstanden på formen

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

og finn spinnretningen $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_t$ som funksjon av t og ω. •Hva er vinkelen mellom spinnretningen og z-aksen? •Hvor lang tid (T) tar det (minst) før $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_t$ peker i samme retning som for $t = 0$? [Uttrykk T ved ω.]

c. •Finn spinoren $\chi(T)$ ved tiden $t = T$, dvs når spinnretningen for første gang har samme verdi som for $t = 0$. •Hva er sannsynlighetene for å måle $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$ når systemet er preparert i begynnelsestilstanden $\chi(t = 0)$? •Hva er sannsynligheten for å måle $S_x = \frac{1}{2}\hbar$ når systemet er i tilstanden $\chi(t = 0)$?

Vedlegg: Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Endimensjonal boks, $V(x) = 0$ for $0 < x < L$, uendelig utenfor

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Noen formler

$$\sin a = (e^{ia} - e^{-ia})/2i \ , \qquad \cos a = (e^{ia} + e^{-ia})/2;$$

$$\tan y = \frac{1}{\cot y} = \tan(y + n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \cdots;$$

$$\sinh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}); \qquad \cosh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}); \qquad \tanh y = \frac{1}{\coth y} = \frac{\sinh y}{\cosh y};$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1; \qquad \frac{d}{dy} \sinh y = \cosh y; \qquad \frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y;$$

$$\sinh y = y + \mathcal{O}(y^3).$$

Noen fysiske konstanter

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\hbar}{m_e c} = 0.529 \times 10^{-10}\text{m}; \qquad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036};$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{m/s}; \qquad \hbar = 0.6582 \times 10^{-15}\text{eVs}; \qquad m_e = 0.5110 \text{ MeV/c}^2.$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \approx 13.6 \text{ eV}; \qquad 1\,\text{MeV} = 10^6\text{eV}.$$

Antall romlige én-partikkel-tilstander i faserom-element $V_0 d^3p$

$$dN_{\text{rom}} = \frac{V_0 d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Spinn $\frac{1}{2}$

For en partikkel med spinn $\frac{1}{2}$ kan en bruke spinnoperatoren

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} = \tfrac{1}{2}\hbar(\hat{\mathbf{e}}_x\sigma_x + \hat{\mathbf{e}}_y\sigma_y + \hat{\mathbf{e}}_z\sigma_z),$$

der

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

er de såkalte Pauli-matrisene. Pauli-*spinorene* $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er da egentilstander til $S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ med egenverdiene $\pm\frac{1}{2}\hbar$. En normert spinntilstand $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan karakteriseres ved spinnretningen,

$$\langle\, \boldsymbol{\sigma}\, \rangle = \chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi = \hat{\mathbf{e}}_x\, \Re\mathrm{e}(2a^*b) + \hat{\mathbf{e}}_y\, \Im\mathrm{m}(2a^*b) + \hat{\mathbf{e}}_z\, (|a|^2 - |b|^2).$$

Matrisene $S_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x$ osv oppfyller dreieimpulsalgebraen,

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

Videre er

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For en enhetsvektor med retningsvinkler θ og ϕ,

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{e}}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{e}}_z \cos\theta,$$

er en egenspinor til $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ bestemt av ligningen

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta\, e^{i\phi} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta\, e^{i\phi} \end{pmatrix}.$$