NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67, eller 97012355

# EKSAMEN I
# FY2045/TFY4250 KVANTEMEKANIKK I

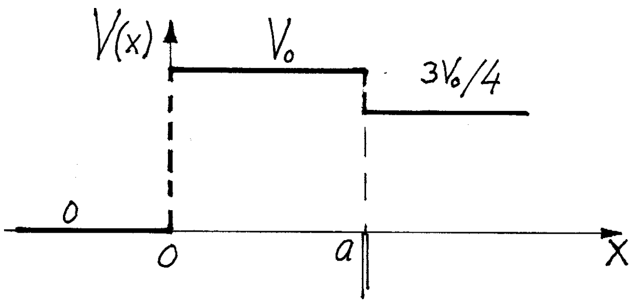
Onsdag 14. desember 2011
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt. Sensuren faller i uke 2 i 2012.

---

## Oppgave 1




En partikkel med masse $m$ beveger seg i et endimensjonalt potensial $V(x) = \widetilde{V}(x) - \beta\delta(x-a)$ som er en kombinasjon av en deltafunksjonsbrønn i $x = a$ og et endelig potensial

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0, \\ V_0 & \text{for} \quad 0 < x < a, \\ 3V_0/4 & \text{for} \quad x > a. \end{cases}$$

Her er

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \qquad \text{og} \qquad \beta = b\,\frac{\hbar^2}{ma},$$

der $b$ er et dimensjonsløst tall.

**a.** ♠*Finn ut* hvilken form en energiegenfunksjon med energi $E$ i intervallet $0 < E < 3V_0/4$ må ha i området $x > a$. Anta at partikkelen kommer inn fra venstre med en energi i det nevnte intervallet, og la $R$ være sannsynligheten for at den reflekteres (også kalt refleksjonskoeffisienten). ♠*Angi* hvor stor $R$ er, og *forklar* resultatet for $R$, om du kan. [Hint: Regn ut sannsynlighets-strømtettheten $j_x$ for $x > a$.]

**b.** For $E > 3V_0/4$ velger vi å betrakte en energiegenfunksjon med formen

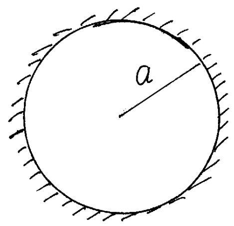
$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{for} \quad x < 0, \quad (k > 0) \\ te^{ik'x} & \text{for} \quad x > a. \quad (k' > 0) \end{cases}$$

♠Finn $k$ og $k'$ uttrykt ved $E$. ♠Finn transmisjonskoeffisienten $T$ (dvs sannsynligheten for at en partikkel som kommer inn fra venstre blir transmittert) uttrykt bl.a ved den komplekse koeffisienten $t$. Det oppgis at $t$ er endelig. ♠Hva er da $T$ og $R$ i grensen der $E$ nærmer seg $3V_0/4$ ovenfra?

**c.** For én bestemt styrke av deltafunksjonsbrønnen, dvs for én bestemt verdi $b_0$ av faktoren $b$, har dette systemet en energiegenfunksjon $\psi$ som har formen $\psi = C$ (en konstant $\neq 0$) for $x < 0$. ♠Finn energien $E$ for denne tilstanden, og lag en skisse som viser den kvalitative oppførselen til $\psi$ for alle $x$. ♠Finn deretter den nøyaktige formen av $\psi$ for $0 < x < a$, uttrykt ved $C$ og $a$.

**d.** ♠Bestem så $b_0$. ♠Hva må til for at dette systemet skal ha en bunden tilstand? ♠Kan det ha mer enn én bunden tilstand? (Begrunn svaret.)

## Oppgave 2




En partikkel med ladning $e$ og masse $m$ befinner seg i en kuleformet boks med radius $a$:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < a, \\ \infty & \text{for} \quad r > a. \end{cases}$$

For et gitt dreieimpulskvantetall $l$ kan løsningene av radialligningen for dette systemet uttrykkes ved den sfæriske Bessel-funksjonen $j_l$ med argumentet $r\sqrt{2mE/\hbar^2}$ (der $E$ er energien), slik at energiegenfunksjonene blir av typen

$$\psi \;\propto\; j_l(r\sqrt{2mE/\hbar^2})\, Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Tabellen nedenfor gir de tre første nullpunktene (for $r > 0$) for hver av funksjonene $j_0$, $j_1$, $j_2$, $j_3$ og $j_4$:

| $j_0$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $j_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Pi_1^{(0)} = \pi$ | $\Pi_1^{(1)} = 4.4934$ | $\Pi_1^{(2)} = 5.7635$ | $\Pi_1^{(3)} = 6.9879$ | $\Pi_1^{(4)} = 8.183$ |
| $\Pi_2^{(0)} = \pi \cdot 2$ | $\Pi_2^{(1)} = 7.7253$ | $\Pi_2^{(2)} = 9.0950$ | $\Pi_2^{(3)} = 10.4171$ | $\Pi_2^{(4)} = 11.705$ |
| $\Pi_3^{(0)} = \pi \cdot 3$ | $\Pi_3^{(1)} = 10.9041$ | $\Pi_3^{(2)} = 12.3229$ | $\Pi_3^{(3)} = 13.6980$ | $\Pi_3^{(4)} = 15.040$ |

**a.** ♠Forklar hvorfor energiegenverdiene for denne partikkelen er

$$E_{nl} = \frac{(\hbar \Pi_n^{(l)})^2}{2ma^2}, \qquad l = 0, 1, \cdots, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

♠Skriv ned radialfunksjonen for det energinivået som har $l = 1$ og radialkvantetall $n_r = 1$ (dvs at radialfunksjonen har ett nullpunkt inne i intervallet $0 < r < a$). Skissér denne radialfunksjonen kvalitativt. ♠Lag en tabell over kvantetallene $l$, $n_r$ (og $n$) for de fire laveste energinivåene, i stigende energirekkefølge, og inkludér også energiene for disse nivåene, i enheter av $\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$.

**b.** ♠Tegn et nivåskjema som inneholder de fire laveste energinivåene for dette systemet. Anta at systemet er preparert i en begynnelsestilstand $\psi_i$ med $l = 0$ og radialkvantetall $n_r = 1$. Det oppgis at den spontane overgangsraten til en slutt-tilstand $\psi_f$ i dipoltilnærmelsen er

$$w_{i \to f} = \alpha \frac{4\omega_{if}^3}{3c^2} |\mathbf{d}_{fi}|^2; \qquad \mathbf{d}_{fi} = \langle \psi_f | \mathbf{r} | \psi_i \rangle; \qquad \omega_{if} = \frac{E_i - E_f}{\hbar}.$$

♠Angi hvilke slutt-tilstander $\psi_f$ som bidrar til den samlede overgangsraten $w_i$ fra begynnelsestilstanden $\psi_i$, i dipoltilnærmelsen? ♠Finn Bohr-frekvensen $\omega_{if}$ for disse overgangene, og energien til det emitterte fotonet (i MeV), når det oppgis at partikkelen er et proton med $m = m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg og at radien er av "kjerne-størrelse", $a = 3 \cdot 10^{-15}$m. ♠Finn også et størrelsesorden-estimat av levetiden $\tau_i = 1/w_i$ for tilstanden $\psi_i$. Også oppgitt: $\alpha \approx 1/137$ ; $c \approx 3 \cdot 10^8$m/s ; $\hbar \approx 1.055 \cdot 10^{-34}$ Nms $\approx 6.582 \cdot 10^{-16}$ eVs. [Dersom du ikke har funnet $\omega_{if}$, kan du *gjette* på størrelsen, for å kunne regne videre.]

## Oppgave 3

En partikkel med masse $m$ befinner seg ved tiden $t = 0$ i grunntilstanden i et harmonisk oscillatorpotensial $V_0(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Partikkelen utsettes så for en forbigående perturbasjon i form av en konstant kraft $F_0$ i $x$-retningen, med varighet på en halv periode. Dette svarer til et perturberende ledd

$$V_1(x,t) = -xF(t) \; ; \qquad F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{for} \quad 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \qquad \tau = \frac{\pi}{\omega}.$$

**a.** ♠Finn matrise-elementene

$$(V_1)_{n0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) V_1(x,t) \psi_0(x) dx$$

uttrykt ved $F(t)$, når det opplyses at $x\psi_0 = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\, \psi_1$. ♠Beregn overgangsamplitudene $a_{0\to n}(\tau)$ ved tiden $t = \tau = \pi/\omega$ og de tilsvarende sannsynlighetene, ved hjelp av førsteordens tidsavhengig perturbasjonsteori.

**b.** Dette problemet kan også løses eksakt. Det perturberte potensialet, $V = V_0 + V_1 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - xF_0$, er harmonisk, med en likevektsposisjon $x_0$ bestemt av ligningen

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2(x - \frac{F_0}{m\omega^2}) \equiv -m\omega^2(x - x_0).$$

Sett i forhold til det perturberte potensialet er begynnelsestilstanden $\Psi(x,0) = C_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$ en "forskjøvet grunntilstand", med $\langle\, x\,\rangle_0 = 0$ og $\langle\, p_x\,\rangle_0 = 0$. Tilstanden under perturbasjonen blir da koherent, med formen

$$\Psi(x,t) = C_0 e^{ig(t)} e^{-m\omega(x-\langle\, x\,\rangle_t)^2/2\hbar} e^{i\langle\, p_x\,\rangle_t x/\hbar}; \qquad C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Her er $g(t)$ en fase som vi ikke trenger i denne oppgaven. Da $\langle\, x\,\rangle_t$ og $\langle\, p_x\,\rangle_t$ oscillerer "klassisk", har vi ved tiden $t = \tau$ (når perturbasjonen akkurat er unnagjort):

$$\langle\, x\,\rangle_\tau = 2x_0\ , \qquad \langle\, p_x\,\rangle_\tau = 0\ , \qquad \Psi(x,\tau) = C_0 e^{ig(\tau)} e^{-m\omega(x-2x_0)^2/2\hbar},$$

altså igjen samme form som grunntilstanden, forskjøvet et stykke $2x_0$ fra likevektsposisjonen $x = 0$ som vi har før og etter perturbasjonen.

♠Vis at $\Psi(x,\tau)$ er en egentilstand til posisjonsrepresentasjonen av annihilasjonsoperatoren $a$,

$$a_{\text{p.r.}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

med egenverdien

$$\alpha_\tau = \text{konstant} \cdot \frac{F_0}{\sqrt{m\omega^3\hbar}},$$

der konstanten skal bestemmes.

Mens perturbasjonen pågår og etterpå kan bølgefunksjonen utvikles i de stasjonære tilstandene for den uperturberte oscillatoren (jf formelarket):

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\Psi_n^{(0)}(x,t).$$

♠Hva er den fysiske tolkningen av koeffisientene $A_n(t)$? ♠Hvorfor er koeffisientene $A_n(t)$ uavhengige av $t$ for $t > \tau$ (slik at $A_n(t) = A_n(\tau) \equiv A_n$ for $t \geq \tau$)?

**c.** Fra relasjonen $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ følger det for de stasjonære oscillatortilstandene at

$$a_{\text{p.r.}}\,\Psi_n^{(0)}(x,\tau) = \sqrt{n}e^{-i\omega\tau}\Psi_{n-1}^{(0)}(x,\tau) = -\sqrt{n}\,\Psi_{n-1}^{(0)}(x,\tau).$$

♠Bruk dette samt ligningen $a_{\text{p.r.}}\Psi(x,\tau) = \alpha_\tau\Psi(x,\tau)$ til å vise at

$$A_n = \frac{(-\alpha_\tau)^n}{\sqrt{n!}}A_0 \qquad (A_n \equiv A_n(\tau)).$$

**d.** ♠Finn den eksakte sannsynligheten $P_n$ for at en energimåling etter perturbasjonen gir egenverdien $E_n$ for oscillatoren. ♠Drøft kort de eksakte sannsynlighetene sammenlignet med resultatene under pkt. **a**.

# Vedlegg: Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

**Diskontinuitetsbetingelse, med potensial** $V(x) = \alpha\delta(x-a)$

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\,\psi(a).$$

**Sannsynlighets-strømtetthet**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\mathrm{e}\left[\Psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\hbar}{im}\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r},t)\right].$$

**Målepostulatet**

(i) De eneste mulige verdiene som en måling av observabelen $F$ kan gi er <u>en av egenverdiene $f_n$</u> til den tilhørende lineære operatoren $\widehat{F}$.

(ii) Umiddelbart etter målingen av $F$ er systemet i en egentilstand til den tilhørende operatoren $\widehat{F}$, nemlig en egentilstand som svarer til den målte egenverdien $f_n$.

**Noen formler**

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b; \qquad \sin 2a = 2\sin a\,\cos a;$$

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b; \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

$$\sin a = (e^{ia} - e^{-ia})/2i\,, \qquad \cos a = (e^{ia} + e^{-ia})/2;$$

$$\tan y = \frac{1}{\cot y} = \tan(y + n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \cdots;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

**Radialligning for kulesymmetrisk potensial** $V(r)$

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv \frac{u(r)}{r}\,Y_{lm}(\theta,\phi);$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]u = Eu; \qquad u(r) \approx \text{constant}\cdot r^{l+1} \text{ når } r \to 0.$$

**Utvalgsregler i dipoltilnærmelsen**

$$\Delta l = \pm 1\,; \qquad \Delta m = 0,\ \pm 1.$$

**Tidsutvikling av forventningsverdier**

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle [\widehat{H}, \widehat{F}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} \right\rangle.$$

**$\delta$-funksjonen og sprangfunksjonen**

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

**Harmonisk oscillator**

De ortonormerte energiegenfunksjonene for potensialet $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (-\infty < x < \infty)$ oppfyller egenverdiligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega\right]\psi_n(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

med løsninger på formen

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,e^{-m\omega x^2/2\hbar}H_n(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}}\;;$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \cdots.$$

**Utgangspunktet for tidsavhengig perturbasjonsteori**

Med en Hamilton-operator $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}(t)$ kan den eksakte løsningen utvikles i de uperturberte stasjonære løsningene:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t)\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t),$$

der

$$\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r})e^{-iE_n t/\hbar}, \qquad \widehat{H}_0\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}).$$

Det eksakte ligningssettet for utviklingskoeffisientene er

$$i\hbar\,\frac{da_k}{dt} = \sum_n e^{i\omega_{kn}t}V_{kn}(t)a_n(t); \qquad \omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar;$$

$$V_{kn}(t) = \langle\psi_k|\widehat{V}(t)|\psi_n\rangle = \int \psi_k^*\,\widehat{V}(t)\psi_n\,d\tau.$$

Med $a_n(t_0) = \delta_{ni}$ oppfyller den eksakte amplituden ligningen

$$a_f(t) = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar}\sum_n\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{fn}t'}V_{fn}(t')a_n(t')dt'.$$

Til første orden i perturbasjonen er da amplituden $a_f \equiv a_{i\to f}$ gitt ved

$$a_{i\to f} = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{fi}t'}V_{fi}(t')dt'.$$

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67, eller 97012355

# EKSAMEN I
# FY2045/TFY4250 KVANTEMEKANIKK I

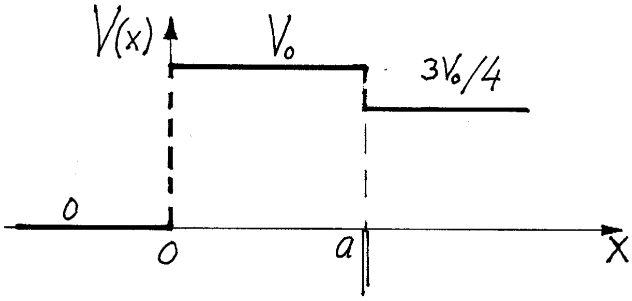
Onsdag 14. desember 2011
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

The questions are given in English on pages 1–4. The Norwegian version is also attached.
A sheet with expressions and formulae is attached Sensuren faller i uke 2 i 2012.

---

## Problem 1




A particle of mass $m$ is moving in a one-dimensional potential $V(x) = \widetilde{V}(x) - \beta\delta(x-a)$ which is a combination of a delta-function well at $x = a$ and a finite potential

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0, \\ V_0 & \text{for} \quad 0 < x < a, \\ 3V_0/4 & \text{for} \quad x > a. \end{cases}$$

Here,

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \qquad \text{and} \qquad \beta = b\,\frac{\hbar^2}{ma},$$

where $b$ is a dimensionless number.

**a.** ♠*Find out* which form an energy eigenfunction with energy $E$ in the interval $0 < E < 3V_0/4$ must have in the region $x > a$. Suppose that the particle is incident from the left with an energy in the interval just mentioned, and let $R$ be the the probability that it is reflected (also called the reflection coefficient). ♠*State* how big $R$ is, and *explain* the result for $R$, if you can. [Hint: Calculate the probability current density $j_x$ for $x > a$.]

**b.** For $E > 3V_0/4$, we choose to consider an energy eigenfunction of the form

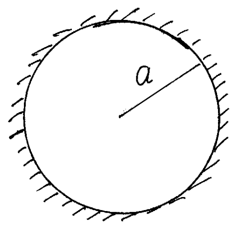
$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{for} \quad x < 0, \quad (k > 0) \\ te^{ik'x} & \text{for} \quad x > a. \quad (k' > 0) \end{cases}$$

♠Find $k$ and $k'$ expressed in terms of $E$. ♠Find the transmission coefficient $T$ (i.e., the probability that a particle incident from the left is transmitted) expressed in terms of the complex coefficient $t$. You are informed that $t$ is finite. ♠What are then $T$ and $R$ in the limit where $E$ approaches $3V_0/4$ from above?

**c.** For a certain strength of the delta-function well, i.e., for a specific value $b_0$ of the factor $b$, this system has an energy eigenfunction $\psi$ which has the form $\psi = C$ (a constant $\neq 0$) for $x < 0$. ♠Find the energy $E$ of this state, and make a sketch which shows the qualitative behaviour of $\psi$ for all $x$. ♠Proceed to find the exact form of $\psi$ for $0 < x < a$, expressed in terms of $C$ and $a$.

**d.** ♠Go on and determine $b_0$. ♠What is the condition for this system to have a bound state? ♠Can it have more than one bound state? (Explain your answer.)

## Problem 2




A particle with charge $e$ and mass $m$ is located inside a spherical box of radius $a$:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < a, \\ \infty & \text{for} \quad r > a. \end{cases}$$

For a given angular-momentum quantum number $l$, the solutions of the radial equation for this system can be expressed in terms of the spherical Bessel function $j_l$ with the argument $r\sqrt{2mE/\hbar^2}$, where $E$ is the energy. Thus the energy eigenfunctions are of the type

$$\psi \propto j_l(r\sqrt{2mE/\hbar^2})\, Y_{lm}(\theta, \phi).$$

The following table gives the first three nodes (zeros) (for $r > 0$) for each of the functions $j_0$, $j_1$, $j_2$, $j_3$ and $j_4$:

| $j_0$ | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $j_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Pi_1^{(0)} = \pi$ | $\Pi_1^{(1)} = 4.4934$ | $\Pi_1^{(2)} = 5.7635$ | $\Pi_1^{(3)} = 6.9879$ | $\Pi_1^{(4)} = 8.183$ |
| $\Pi_2^{(0)} = \pi \cdot 2$ | $\Pi_2^{(1)} = 7.7253$ | $\Pi_2^{(2)} = 9.0950$ | $\Pi_2^{(3)} = 10.4171$ | $\Pi_2^{(4)} = 11.705$ |
| $\Pi_3^{(0)} = \pi \cdot 3$ | $\Pi_3^{(1)} = 10.9041$ | $\Pi_3^{(2)} = 12.3229$ | $\Pi_3^{(3)} = 13.6980$ | $\Pi_3^{(4)} = 15.040$ |

**a.** ♠Explain why the energy eigenvalues for this particle are

$$E_{nl} = \frac{(\hbar\Pi_n^{(l)})^2}{2ma^2}, \qquad l = 0, 1, \cdots, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

♠Write down the radial function for the energy level which has $l = 1$ and radial quantum number $n_r = 1$ (implying that the radial function has one zero inside the interval $0 < r < a$). Make a qualitative sketch of this radial function. ♠Make a table of the quantum numbers $l$, $n_r$ (and $n$) for the four lowest energy levels, sorted in order of increasing energy, and include also the energies of these levels, in units of $\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$.

**b.** ♠Sketch an energy level diagram which contains the four lowest energy levels for the present system. Suppose that the system is prepared in an initial state $\psi_i$ with $l = 0$ and radial quantum number $n_r = 1$. You are informed that the spontaneous transition rate to a final state $\psi_f$ is in the dipole approximation

$$w_{i\to f} = \alpha\,\frac{4\omega_{if}^3}{3c^2}|\mathbf{d}_{fi}|^2; \qquad \mathbf{d}_{fi} = \langle\psi_f|\mathbf{r}|\psi_i\rangle; \qquad \omega_{if} = \frac{E_i - E_f}{\hbar}.$$

♠State which final states $\psi_f$ that contribute to the total transition rate $w_i$ from the initial state $\psi_i$, in the dipole approximation? ♠Find the Bohr frequency $\omega_{if}$ for these transitions, and the energy of the emitted photon (in MeV), given that the particle is a proton with $m = m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg and that the radius is of nuclear size, $a = 3 \cdot 10^{-15}$ m. ♠Find also an order-of-magitude estimate of the lifetime $\tau_i = 1/w_i$ for the state $\psi_i$. Given: $\alpha \approx 1/137$ ; $c \approx 3 \cdot 10^8$m/s ; $\hbar \approx 1.055 \cdot 10^{-34}$ Nms $\approx 6.582 \cdot 10^{-16}$ eVs. [If you were unable to find $\omega_{if}$, then *guess* a size of it, in order to proceed.]

## Problem 3

A particle of mass $m$ is at time $t = 0$ in the ground state in a harmonic oscillator potential $V_0(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. The particle is then subjected to a transient perturbation in the form of a constant force $F_0$ in the $x$-direction, acting during half a period. This corresponds to a perturbing term

$$V_1(x,t) = -xF(t)\ ; \qquad F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{for} \quad 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \tau = \frac{\pi}{\omega}.$$

**a.** ♠Find the matrix elements

$$(V_1)_{n0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)V_1(x,t)\psi_0(x)dx$$

expressed in terms of $F(t)$, given that $x\psi_0 = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\,\psi_1$. ♠Calculate the transition amplitudes $a_{0\to n}(\tau)$ at the time $t = \tau = \pi/\omega$ and the corresponding probabilities, using first-order time-dependent perturbation theory.

**b.** This problem can also be solved exactly. The perturbed potential, $V = V_0 + V_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - xF_0$, is harmonic, with an equilibrium position $x_0$ determined by the equation

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2(x - \frac{F_0}{m\omega^2}) \equiv -m\omega^2(x - x_0).$$

Seen from the perturbed potential, the initial state $\Psi(x, 0) = C_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}$ is a "shifted ground state", with $\langle\, x\,\rangle_0 = 0$ and $\langle\, p_x\,\rangle_0 = 0$. During the perturbation the state then becomes coherent, with the form

$$\Psi(x,t) = C_0 e^{ig(t)} e^{-m\omega(x - \langle\, x\,\rangle_t)^2/2\hbar} e^{i\langle\, p_x\,\rangle_t x/\hbar}; \qquad C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Here, $g(t)$ is a phase which we do not need in this Problem. Since $\langle\, x\,\rangle_t$ and $\langle\, p_x\,\rangle_t$ oscillate "classically", we have at the time $t = \tau$ (when the perturbation has just "stopped"):

$$\langle\, x\,\rangle_\tau = 2x_0\ , \qquad \langle\, p_x\,\rangle_\tau = 0\ , \qquad \Psi(x,\tau) = C_0 e^{ig(\tau)} e^{-m\omega(x-2x_0)^2/2\hbar},$$

that is, again the same form as the ground state, shifted a distance $2x_0$ from the equilibrium position $x = 0$ which we have before and after the perturbation.

♠Show that $\Psi(x,\tau)$ is an eigenstate of the position representation of the annihilation operator $a$,

$$a_{\text{p.r.}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

with the eigenvalue

$$\alpha_\tau = \text{constant} \cdot \frac{F_0}{\sqrt{m\omega^3\hbar}},$$

where you should determine the constant.

During the perturbation and afterwards, the wave function can be expanded in terms of the stationary states of the unperturbed oscillator (cf the formula sheet):

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\Psi_n^{(0)}(x,t).$$

♠What is the physical interpretation of the coefficients $A_n(t)$? ♠Why are the coefficients $A_n(t)$ independent of $t$ for $t > \tau$ (so that $A_n(t) = A_n(\tau) \equiv A_n$ for $t \geq \tau$)?

**c.** From the relation $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ it follows for the stationary oscillator states that

$$a_{\text{p.r.}}\,\Psi_n^{(0)}(x,\tau) = \sqrt{n}e^{-i\omega\tau}\Psi_{n-1}^{(0)}(x,\tau) = -\sqrt{n}\,\Psi_{n-1}^{(0)}(x,\tau).$$

♠Use this together with the equation $a_{\text{p.r.}}\Psi(x,\tau) = \alpha_\tau\Psi(x,\tau)$ to show that

$$A_n = \frac{(-\alpha_\tau)^n}{\sqrt{n!}}\,A_0\ ; \qquad (A_n \equiv A_n(\tau)).$$

**d.** ♠Find the exact probability $P_n$ that an energy measurement gives the eigenvalue $E_n$ for the oscillator. ♠Discuss briefly the exact probabilities compared to the results obtained under **a** above.

## Attachment: Formulae and expressions

Some of this may turn out to be useful.

**Discontinuity condition, with potential** $V(x) = \alpha\delta(x-a)$

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\,\psi(a).$$

**Probability current density**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re\mathrm{e}\left[\Psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\hbar}{im}\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r},t)\right].$$

**Measurement postulate**

(i) The only possible result of a precise measurement of an observable $F$ is one of the eigenvalues $f_n$ of the corresponding linear operator $\widehat{F}$.

(ii) Immediately after the measurement of the eigenvalue $f_n$ the system is in an eigenstate of $\widehat{F}$, namely, the eigenstate $\psi_n$ corresponding to the measured eigenvalue $f_n$ .

**Some formulae**

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b; \qquad \sin 2a = 2\sin a\,\cos a;$$

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b; \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

$$\sin a = (e^{ia} - e^{-ia})/2i\,, \qquad \cos a = (e^{ia} + e^{-ia})/2;$$

$$\tan y = \frac{1}{\cot y} = \tan(y + n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \cdots;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

**Radial equation for spherically symmetric potential** $V(r)$

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \equiv \frac{u(r)}{r}\,Y_{lm}(\theta,\phi);$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]u = Eu; \qquad u(r) \approx \text{constant}\cdot r^{l+1} \text{ when } r \to 0.$$

**Selection rules in the dipole approximation**

$$\Delta l = \pm 1\,; \qquad \Delta m = 0,\, \pm 1.$$

**Time development of expectation values**

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle [\widehat{H}, \widehat{F}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} \right\rangle.$$

**$\delta$-function and step funtion**

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

**Harmonic oscillator**

The orthonormalized energy eigenfuntions for the potential $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (-\infty < x < \infty)$ satisfy the eigenvalue equation

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega\right]\psi_n(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

with solutions on th form

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}};$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \cdots.$$

**Starting point for time-dependent perturbation theory**

With a Hamiltonian $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}(t)$, the exact solution can be expanded in terms of the unperturbed stationary solutions:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t)\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t),$$

where

$$\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r})e^{-iE_n t/\hbar}, \qquad \widehat{H}_0\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}).$$

The exact set of equations for the expansion coefficients is

$$i\hbar\frac{da_k}{dt} = \sum_n e^{i\omega_{kn}t}V_{kn}(t)a_n(t); \qquad V_{kn}(t) = \langle\psi_k|\widehat{V}(t)|\psi_n\rangle, \quad \omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar.$$

With $a_n(t_0) = \delta_{ni}$, the exact amplitude satisfies the equation

$$a_f(t) = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar}\sum_n \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{fn}t'}V_{fn}(t')a_n(t')dt'.$$

To first order in the perturbation the amplitude $a_f \equiv a_{i\to f}$ is then given by

$$a_{i\to f} = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{fi}t'}V_{fi}(t')dt'.$$