NTNU – Trondheim
Norwegian University of
Science and Technology

NTNU, Department of Physics

Exam FY2045 fall 2020

Lecturer: Professor Jens O. Andersen
Department of Physics, NTNU

Wednesday December 2 2020
15.00-19.00

Permitted examination support material:

No restrictions. Alle hjelpemiddel tillatne.

Read carefully. Les nøye.

Good luck! Bonne chance! Viel Glück! Veel succes! Lykke til!

Problem 1

Consider a non-interacting Fermi gas in one dimension. The length of the box is L.

a) Find the momentum eigenstates $\psi_p(x)$ and the eigenvalues p if we impose periodic boundary conditions.

b) Calculate the particle density ρ, energy density $\mathcal{E}$, and pressure P and express the results in terms of the Fermi momentum p_F.

c) Find the expressions for $\mathcal{E}$ and P in the ultrarelativistic limit. Use this to find the equation of state in the ultrarelativistic limit, i.e. find $P = P(\mathcal{E})$.

Problem 2

The Hamiltonian of the hydrogen atom moving in a Coulomb potential is

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{k}{r} , \qquad (1)$$

where $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. The normalized ground-state wavefunction of the hydrogen atom is

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} , \qquad (2)$$

where $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ is the Bohr radius. In this problem, we shall apply the variational principle to the hydrogen atom in the ground state. A trial wavefunction is

$$\psi(r) = A\sqrt{r}e^{-\alpha r} , \qquad (3)$$

where α is a real positive variational parameter and A is a normalization constant.

a) Determine the normalization constant A.

b) Calculate the expectation value of the kinetic energy T using the trial wavefunction, $\langle\psi|T|\psi\rangle$.

c) Calculate the expectation value of the potential energy V using the trial wavefunction, $\langle\psi|V|\psi\rangle$.

d) Find the value of α that minimizes the total energy $E = \langle\psi|T|\psi\rangle + \langle\psi|V|\psi\rangle$ and the energy for this value. Compare the result with the exact value $E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$.

Problem 3

Consider an electron in a hydrogen atom. The orbital angular momentum operator is denoted by $\hat{\mathbf{L}}$ and the spin operator by $\hat{\mathbf{S}}$. Since $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{L}_z$ and $\hat{S}_z$ commute among themselves and commute with the Hamiltonian $\hat{H}$ of the hydrogen atom, l, m_l, s, and m_s are good quantum numbers. We denote the energy eigenstates of hydrogen by $|nlm_lm_s\rangle$, where n is the principal quantum number. Notice that we suppress the quantum number s since it is always $\frac{1}{2}$.

a) Consider the case with $l = 1$. How many states are there?

b) The total angular momentum is given by $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$. Explain why $\hat{\mathbf{J}}^2$ and $\hat{J}_z$ commute with $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, and $\hat{H}$.

c) Instead of using the quantum numbers n, l, m_l, and m_s, we can make a change of basis and label the energy eigenstates by n, l, j, and m_j. These are denoted by $|nljm_j\rangle$. For $l = 1$, what are the possible values for j? Count the number of states and compare with the result in a).

d) For $l = 1$, express all the states $|nljm_j\rangle$ in terms of $|nlm_lm_s\rangle$.

Problem 4

Consider an electron moving in a spherically symmetric potential $V(r)$, which is *not* a Coulomb potential.

a) Explain why we can label the energy eigenstates with the quantum numbers l, m_l, s, and m_s.

b) The energy levels of the electron in this potential depend on the principal quantum number n as well as l. What is the degeneracy g of each level?

c) We consider a weak electric field as a perturbation. The Hamiltonian of this perturbation is [1]

$$H_{\text{Stark}} \quad = \quad eEr\cos\theta\ , \tag{4}$$

where E is the strength of the electric field, which points in the z-direction. Since the system is degenerate, we must use degenerate perturbation theory. The angular part of the matrix elements of H_{Stark} is proportional to the integral

$$\int Y^*_{lm_l}(\theta,\phi)\cos\theta Y_{l,m_l'}(\theta,\phi)d\Omega\ . \tag{5}$$

Explain why the angular integral vanishes in the degenerate subspace. Conclude that there is no first-order Stark effect in this case.

Remark: Since the Coulomb potential has an extra degeneracy in l, the above does not apply and there is a first-order Stark effect. The Coulomb potential is very special.

Problem 5

Consider a compact star. Explain briefly hydrostatic equilibrium.

[1] Named after the German physicist Johannes Stark.

Oppgåve 1

I denne oppgåva skal vi studere ein fri Fermigass i ein romleg dimensjon. Lengda til boksen er L.

a) Finn eigentilstandane $\psi_p(x)$ til impulsoperatoren og eigenverdiane p dersom vi har periodiske randkrav.

b) Rekn ut partikkeltettheiten ρ, energitettheiten $\mathcal{E}$ og trykket P og uttrykk resultata ved hjelp av Fermiimpulsen p_F.

c) Finn $\mathcal{E}$ og P i den ultrarelativistiske grensa. Finn tilstandslikninga i den ultrarelativistiske grensa, det vil seie finn $P = P(\mathcal{E})$.

Oppgåve 2

Hamiltonoperatoren for hydrogenatomet i eit Coulombpotensial er

$$\hat{H} \quad = \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{k}{r} \ , \tag{6}$$

der $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Den normaliserte bølgjefunksjonen i grunntilstanden er

$$\psi_0(r) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \ , \tag{7}$$

der $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ er Bohrradien. I denne oppgåva skal vi nytte variasjonsprinsippet for hydrogenatomet i grunntilstanden. Ein høveleg prøvebølgjefunksjon er

$$\psi(r) \quad = \quad A\sqrt{r}e^{-\alpha r} \ , \tag{8}$$

der α er ein reell og positiv variasjonsparameter og A er normeringskonstanten.

a) Rekn ut normeringskonstanten A.

b) Rekn ut forventningsverdien til den kinetiske energien T med prøvebølgjefunksjonen, $\langle\psi|T|\psi\rangle$.

c) Rekn ut forventningsverdien til den potensielle energien V med prøvebølgjefunksjonen, $\langle\psi|V|\psi\rangle$.

d) Finn verdien på α som minimerer den totale energien, $E = \langle\psi|T|\psi\rangle + \langle\psi|V|\psi\rangle$ og energien for denne verdien. Samanlikn resultatet med den eksakte verdien $E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$.

Oppgåve 3

Vi skal studere eit elektron i hydrogenatomet. Dreieimpulsoperatoren er $\hat{\mathbf{L}}$ og spinnoperatoren er $\hat{\mathbf{S}}$. Sidan $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{L}_z$ og $\hat{S}_z$ kommuterer innbyrdes og med Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ til hydrogenatomet, er l, m_l, s og m_s gode kvantetal. Energieigentilstandane til hydrogen er $|nlm_lm_s\rangle$, der n hovudkvantetalet. Merk at vi ikkje har teke med kvantetalet s sidan det alltid er lik $\frac{1}{2}$.

a) Kor mange tilstandar har vi i tilfellet $l = 1$?

b) Den totale dreieimpulsen er gjeven ved $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$. Forklar kvifor $\hat{\mathbf{J}}^2$ og $\hat{J}_z$ kommuterer med $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$ og $\hat{H}$.

c) I staden for å nytte kvantetala n, l, m_l og m_s, kan vi skifte basis og bruke merkelappane n, l, j, and and m_j. Desse tilstandane skriv vi som $|nljm_j\rangle$. Kva er dei moglege verdiane til j for tilfellet $l = 1$? Finn talet på tilstandar og samanlikn med a).

d) Uttrykk alle tilstandane $|nljm_j\rangle$ ved hjelp av $|nlm_lm_s\rangle$ for tilfellet $l = 1$.

Oppgåve 4

Vi skal studere eit elektron som bevegar seg i eit kulesymmetrisk potensial $V(r)$ som *ikkje* er Coulombpotensialet.

a) Forklar kvifor vi kan sette merkelappane l, m_l, s, and m_s på energieigentilstandane.

b) Energinivåa til eit elektron i dette potensialet er avhengig av hovudkvantetalet n og l. Kva er degenerasjonsgraden g for kvart energinivå.

c) Vi skal studere eit veikt elektrisk felt som perturbasjon. Hamiltonoperatoren til denne perturbasjonen er [2]

$$H_{\text{Stark}} = eEr\cos\theta \, , \tag{9}$$

der E er den elektriske feltstyrken som peikar i z-retning. Sidan systemet er degenerert, må ein nytte degenerert perturbasjoneteori. Vinkeldelen til matriseelementet til H_{Stark} er

[2] Oppkalla etter den tyske fysikaren Johannes Stark.

proporsjonal med integralet

$$\int Y^*_{lm_l}(\theta,\phi)\cos\theta Y_{l,m'_l}(\theta,\phi)d\Omega \; . \tag{10}$$

Forklar kvifor vinkeldelen er lik null i det degenererte underrommet. Konkluder med at det ikkje er nokon fyrste-ordens Stark-effekt i dette tilfellet.

Merknad: Sidan Coulombpotensialet har ekstra degenerasjon i l, viser det seg at vi har ein fyrsteordens Stark-effekt. Coulombpotensialet er difor eit unntak.

Oppgåve 5

Forklar kort hydrostatisk likevekt for ei kompakt stjerne