NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53, mobil 90 07 51 72

Eksamen i fag FY2450 Astrofysikk
Lørdag 21. mai 2011
Tid: 9.00–13.00

Sensurfrist: Lørdag 11. juni 2011

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske og fysiske tabeller.

En tabell over fysiske konstanter finnes sist i dette oppgavesettet.
Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

a) I vår galakse, Melkeveien, observeres galaktiske (også kalt åpne) stjernehoper og kuleformete stjernehoper. Forklar kort hva som kjennetegner de to typene stjernehoper.

Hvor i Melkeveien er de å finne?

b) Figur 1 og figur 2 viser Hertzsprung–Russell-diagram for to galaktiske stjernehoper og en kuleformet stjernehop.

Horisontalaksen i hvert diagram viser fargeindeksen $B - V$, mens vertikalaksen viser den absolutte størrelsesklassen (absolutte magnituden) til hver stjerne.

Hvordan måles fargeindeks og absolutt størrelsesklasse til en stjerne?

Forklar hvorfor fargeindeksen er et mål på overflatetemperaturen til stjernen.

Må vi kjenne avstanden for å kunne måle fargeindeksen? Begrunn svaret.

c) Figurene 1 og 2 tyder på at alle stjernene i en stjernehop er omtrent like gamle, og at de tre stjernehopene har forskjellig alder. Forklar kort hvordan vi kan resonnere oss fram til de to konklusjonene.

Hvilken av de tre stjernehopene er yngst, og hvilken er eldst? Begrunn svarene.

d) Hva er en hovedseriestjerne? Mer presist er det to spørsmål å svare på:

Når vi observerer en stjerne, hvordan kan vi vite at den er en hovedseriestjerne?

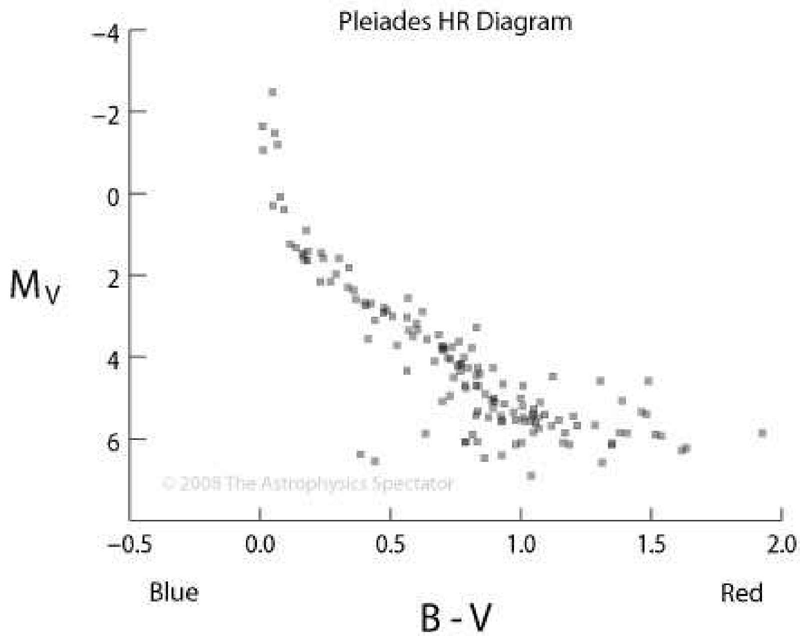
Og hva er den viktigste antagelsen vi må gjøre for å lage en teoretisk modell av en hovedseriestjerne?

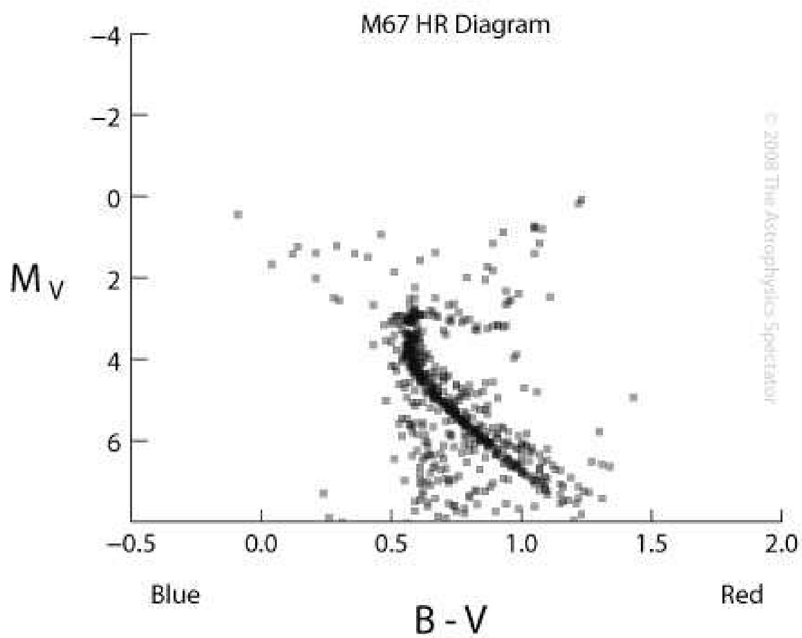
En empirisk sammenheng mellom massen M og luminositeten L til en hovedseriestjerne er potensloven

$$L = \text{konstant} \times M^{\alpha} \ .$$

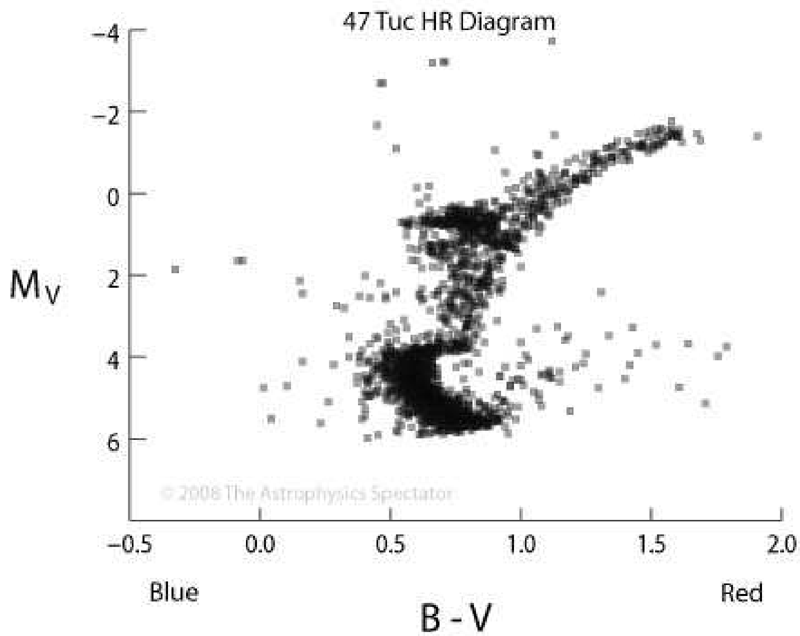
Eksponenten α varierer litt, for de mest massive hovedseriestjernene er $\alpha = 3$.

Bruk denne relasjonen sammen med figur 1 til å beregne forholdet mellom alderen til de to galaktiske stjernehopene Pleiadene (Sjustjernen) og M67.





Figur 1: Hertzsprung–Russell-diagram for to åpne (galaktiske) stjernehoper, Pleiadene (Sjustjernen) og M67 (nr. 67 i Messiers katalog). Horisontalaksen viser fargeindeksen $B - V$, vertikalaksen viser den absolutte størrelsesklassen (magnituden) M_V målt med et V-filter som slipper gjennom synlig lys. Figurene er tegnet av Jerome James Brainerd.



Figur 2: Hertzsprung–Russell-diagram for en kuleformet stjernehop, NGC 104, også kjent som 47 Tucanae. Stjernebildet Tukanen er oppkalt etter en søramerikansk fugl. Merk at de mest lyssvake stjernene mangler i diagrammet, fordi avstanden er så stor som 17 000 lysår.

Oppgave 2:

a) Stjernen ESO 439–26 er den mest lyssvake hvite dvergstjernen som er kjent. Avstanden er 140 lysår, og den har visuell størrelsesklasse (magnitude) $m_V = 20.5$.

Hva er den absolutte visuelle størrelsesklassen M_V?

Hva er den maksimale avstanden der den ville være synlig med bare øyet?

Utregningen av den absolutte størrelsesklassen gir selvfølglig mening bare dersom avstanden er målt med en uavhengig metode. Beskriv kort hvordan en kan måle avstanden uten å kjenne den absolutte størrelsesklassen.

b) Overflatetemperaturen til den hvite dvergen ESO 439–26 er estimert til 4560 K.

Hva er da radien R? Sammenlign med Sola, som har absolutt visuell størrelsesklasse 4,8 og overflatetemperatur 5780 K.

Hva er massen M til denne hvite dvergstjernen, gitt den teoretiske sammenhengen

$$MR^3 = \left(\frac{Z}{A}\right)^5 4{,}295\ 10^{52}\ \text{kg m}^3\ ? \tag{1}$$

Anta f.eks. at stjernen inneholder mest karbon, med atomnummer $Z = 6$ og massetall $A = 12$, eller mest jern, med $Z = 26$ og $A = 56$. Sammenlign med solmassen.

Ligning (1) forutsetter at den degenererte elektrongassen er ikke-relativistisk.
Er den forutsetningen gyldig her?
Hvordan forandres sammenhengen mellom masse og radius når vi tar hensyn til at elektronene blir relativistiske etter hvert som tettheten øker?

Oppgave 3:

I denne oppgaven bruker vi først Newtons gravitasjonsteori.

a) En planet (eller stjerne) har masse M, kulesymmetrisk massefordeling og radius R.

Hva er tyngdens akselerasjon g på overflaten av planeten?

En liten masse m som faller fritt i tyngdefeltet utenfor planeten, har konstant energi

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{r}\ ,$$

der v er hastigheten og r er avstanden til sentrum av planeten.

Vis at unnslipningshastigheten fra overflaten av planeten er

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\ . \tag{2}$$

Avhenger unnslipningshastigheten av bevegelsesretningen? Begrunn svaret.

Anta at massen m holdes i ro ved radius $r = R+h$, før den slippes og faller loddrett ned på overflaten. Vis at når fallhøyden h er liten, så treffer den overflaten med hastigheten

$$v = \sqrt{2gh}\ . \tag{3}$$

Karl Schwarzschild fant den eksakte løsningen av Einsteins gravitasjonsligning i tomt rom utenfor en kulesymmetrisk massefordeling med total masse M. Den ser ut som følger, i polarkoordinater r, θ, φ:

$$c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{R_M}{r}} - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\ . \tag{4}$$

Den avhenger av lengdeparameteren

$$R_M = \frac{2GM}{c^2}\ ,$$

som kalles Schwarzschild-radien til massen M.

Den fysiske tolkningen av tidsvariablene τ og t er at $\mathrm{d}\tau$ er et lite intervall av egentid, målt med en klokke som beveger seg, mens $\mathrm{d}t$ er et lite tidsintervall målt med en klokke som er i ro uendelig langt borte. Tolkningen av radialkoordinaten r er at en sirkel $r = R$ med sentrum i origo har omkrets $2\pi R$, og kuleflaten $r = R$ med sentrum i origo har areal $4\pi R^2$. Den fysiske avstanden i radiell retning som svarer til det lille koordinatintervallet $\mathrm{d}r$ er

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{R_M}{r}}}\ .$$

Alt dette kan leses ut av Schwarzschild-metrikken i ligning (4).

b) En liten masse (en stein) som er i ro ved radius $r = r_0$, før den slippes og faller loddrett ned på overflaten, treffer overflaten med hastighet

$$v = c \sqrt{\frac{\frac{R_M}{R} - \frac{R_M}{r_0}}{1 - \frac{R_M}{r_0}}} \,. \tag{5}$$

Denne formelen kan også utledes fra Schwarzschild-metrikken i ligning (4).

Hva blir hastigheten v når vi holder r_0 konstant, samtidig som vi gjør radien R mindre så den til slutt nærmer seg Schwarzschild-radien R_M?

Bruk ligning (5) til å finne en formel for unnslipningshastigheten.

Den formelen du finner, er da gyldig i generell relativitetsteori.
Sammenlign med den ikke-relativistiske formelen, ligning (2). Kommentar?

c) Anta nå at $r_0 - R$ er liten i ligning (5), det vil si mye mindre enn radien R. I følge Schwarzschild-metrikken er fallhøyden h, altså den fysiske avstanden som steinen faller, da gitt ved formelen

$$h = \frac{r_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}} \,. \tag{6}$$

Beregn hastigheten som en kaffekopp treffer golvet med hvis den faller ned fra et bord med høyde $h = 1$ m. Ta fire eksempler på verdier for masse M og radius R: 1) Jorda, 2) Sola, 3) en hvit dverg med samme masse som Sola og samme radius som Jorda, og 4) en nøytronstjerne med samme masse som Sola og radius 15 km.

d) Hvis $r_0 - R$ er liten nok, blir hastigheten v i ligning (5) mye mindre enn c, og da vil den ikke-relativistiske formelen i ligning (3) være gyldig.

Bruk ligningene (3), (5) og (6) til å utlede en generell-relativistisk formel for tyngdens akselerasjon g på overflaten av planeten.

Hva skjer med tyngdens akselerasjon hvis radien R blir så liten at den nærmer seg Schwarzschild-radien R_M?

Noen fysiske konstanter og formler

Newtons gravitasjonskonstant:	$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elementærladningen:	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Finstrukturkonstanten:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137{,}036$
Boltzmanns konstant:	$k = k_B = 1{,}3807 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Stefan–Boltzmanns konstant:	$\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$
Elektronmassen:	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
Protonmassen:	$m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938,28\,\mathrm{MeV}/c^2$
Nøytronmassen:	$m_\mathrm{n} = 1{,}6749 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939,57\,\mathrm{MeV}/c^2$
Atommasseenheten:	$\mathrm{u} = 1{,}660\,54 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931,46\,\mathrm{MeV}/c^2$
Jordmassen:	$M_\oplus = 5{,}974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Jordradien:	$R_\oplus = 6{,}378 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$
Solmassen:	$M_\odot = 1{,}9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Solradien:	$R_\odot = 6{,}960 \times 10^{5}\,\mathrm{km}$
Avstanden til Sola (en astronomisk enhet):	$1\,\mathrm{AU} = 1{,}4960 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
Hubble-konstanten:	$H_0 = 70\,(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$
	1 pc = 1 parsec = 3,26 lysår
	1 lysår = $9{,}46 \times 10^{15}$ m

Stefan–Boltzmanns lov (fluks F av svart stråling med temperatur T): $F = \sigma T^4$.

Relasjon mellom tilsynelatende størrelsesklasse (tilsynelatende magnitude) m og absolutt størrelsesklasse (absolutt magnitude) M for en stjerne i avstand d:

$$m - M = 5\ \log_{10}\left(\frac{d}{10\ \text{parsec}}\right).$$

For to stjerner 1 og 2 gjelder følgende relasjoner:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{b_1}{b_2}\right), \\ M_2 - M_1 &= 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right). \end{aligned}$$

Der b er tilsynelatende lysstyrke (engelsk: brightness) og L er luminositet (absolutt lysstyrke).

The Norwegian University of Science and Technology
Department of Physics

Contact person:
Name: Jan Myrheim
Telephone: 73 59 36 53, mobile 90 07 51 72

Examination, course FY2450 Astrophysics
Saturday May 21, 2011
Time: 9.00–13.00

Grades made public: Saturday June 11, 2011

Allowed to use: Calculator, mathematical and physical tables.

A table of physical constants is found at the end of this problem set.
All subproblems are given the same weight in the grading.

Problem 1:

a) Our galaxy, the Milky Way, contains galactic (also called open) star clusters and globular star clusters. Describe briefly the main characteristics of the two types of star clusters.

Where in the Milky Way are they found?

b) Figure 1 and Figure 2 show Hertzsprung–Russell diagrams of two galactic star clusters and one globular star cluster.

The horizontal axis in each diagram shows the colour index $B - V$, whereas the vertical axis shows the absolute magnitude of each star.

How are the colour index and the absolute magnitude of a star measured?

Explain why the colour index is a measure of the surface temperature of a star.

Is it necessary to know the distance to measure the colour index? Explain your reasoning.

c) The Figures 1 and 2 indicate that all the stars in one cluster have approximately the same age, and that the three star clusters have different ages.

Explain briefly how we may arrive at these two conclusions, and list the three star clusters in order of increasing age.

d) What is a main sequence star? More precisely, there are two questions to be answered:

When we observe a star, how can we know that it is a main sequence star?

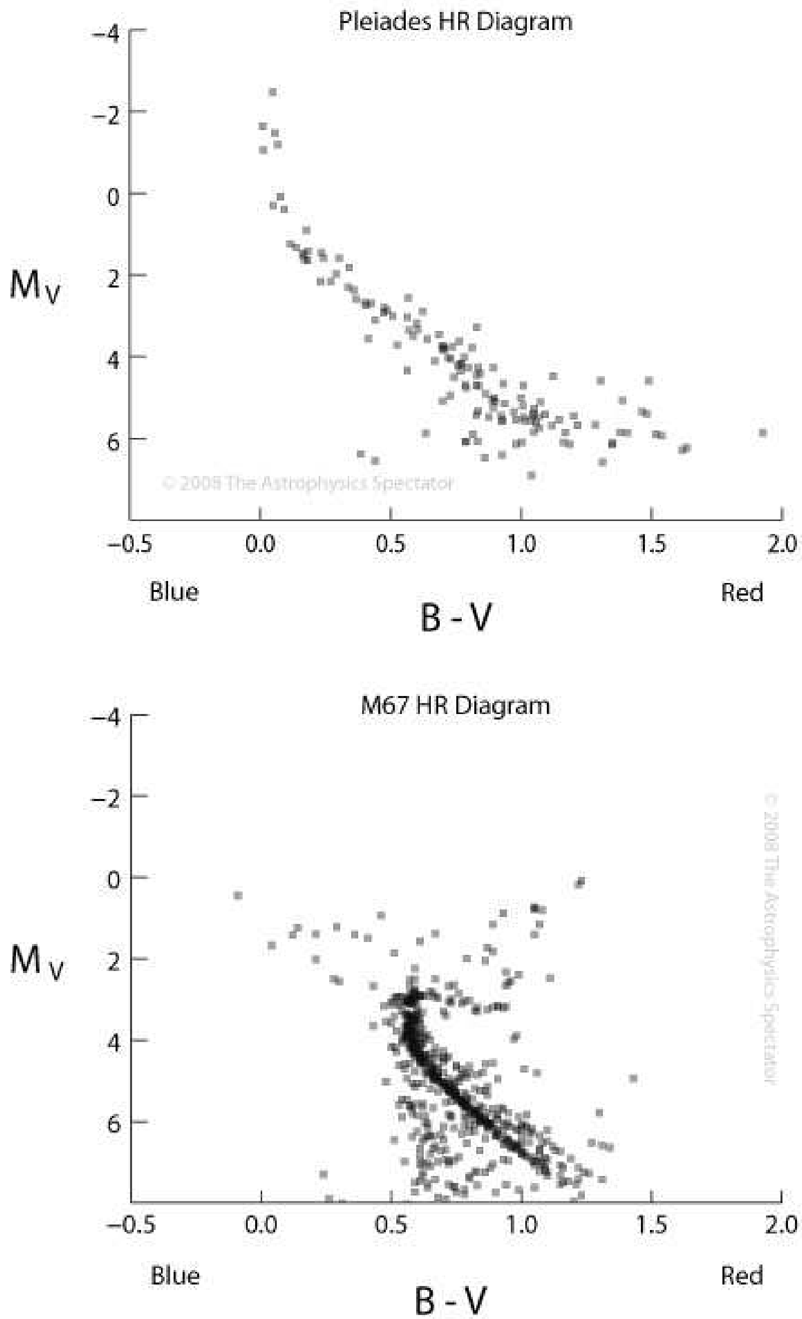
And what is the most important assumption we have to make in order to compute a theoretical model of a main sequence star?

An empirical relation between the mass M and luminosity L of a main sequence star is the power law

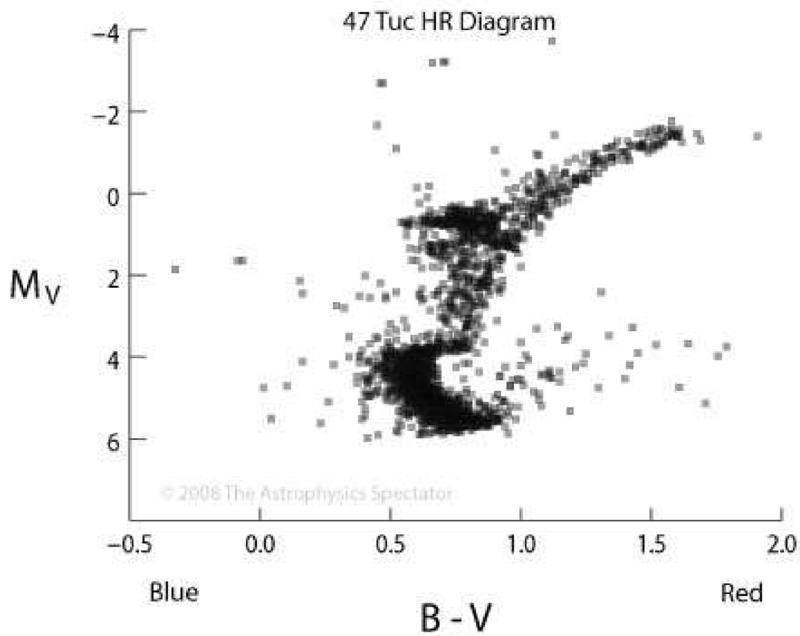
$$L = \text{constant} \times M^{\alpha} \ .$$

The exponent α may vary, for the most massive main sequence stars we have $\alpha = 3$.

Use this relation together with Figure 1 in order to compute the ratio between the ages of the two galactic star clusters the Pleiades (the Seven Sisters) and M67.



Figur 1: Hertzsprung–Russell diagrams of two open (galactic) star clusters, the Pleiades (Seven Sisters) and M67 (no. 67 in Messier's catalogue). The horizontal axis shows the colour index $B-V$, the vertical axis shows the absolute magnitude M_V measured with a V filter admitting visible light. The figures are plotted by Jerome James Brainerd.



Figur 2: Hertzsprung–Russell diagram of a globular star cluster, NGC 104, also known as 47 Tucanae. The constellation Tucana is named after a South American bird. The least luminous stars are missing in the diagram because the distance is large, 17 000 light years.

Problem 2:

a) The star ESO 439–26 is the least luminous white dwarf star known. Its distance is 140 light years, and its visual magnitude is $m_V = 20.5$.

What is its absolute visual magnitue M_V?

What is the maximal distance where it would be visible with the unaided eye?

The computation of the absolute magnitude is of course meaningful only if the distance is measured by some independent method. Describe briefly how to measure distance without knowing beforehand the absolute magnitude.

b) The surface temperature of the white dwarf ESO 439–26 has been estimated at 4560 K.

What is then its radius R? Compare with the Sun, which has absolute visual magnitude 4.8 and surface temperature 5780 K.

What is the mass M of this white dwarf, given the theoretical relation

$$MR^3 = \left(\frac{Z}{A}\right)^5 4.295\ 10^{52}\ \text{kg m}^3\ ? \tag{1}$$

Assume e.g. that the star contains mostly carbon, with atomic number $Z = 6$ and mass number $A = 12$, or mostly iron, with $Z = 26$ and $A = 56$. Compare with the solar mass.

Equation (1) is valid only if the degenerate electron gas is non-relativistic.
Is that assumption valid here?
How is the relation between mass and radius changed when we take into account that the electrons become relativistic as the density increases?

Problem 3:

In this problem we use first Newton's theory of gravitation.

a) A planet (or star) has mass M, a spherically symmetric mass distribution and radius R.

What is the acceleration of gravity g on the surface of the planet?

A small mass m falling freely in the gravitational field outside the planet has constant energy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} ,$$

where v is the velocity and r is the distance to the centre of the planet.

Show that the escape velocity from the surface of the planet is

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} . \tag{2}$$

Does the escape velocity depend on the direction of motion? Explain your reaoning.

Assume that the mass m is kept at rest at the radius $r = R + h$, before it is relased and falls vertically onto the surface. Show that when its height of fall h is small, it hits the surface with the velocity

$$v = \sqrt{2gh} . \tag{3}$$

Karl Schwarzschild found the exact solution of Einstein's gravitational equation in empty space outside a spherically symmetric mass distribution of total mass M. It looks like this, in polar coordinates r, θ, φ:

$$c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{R_M}{r}} - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 . \tag{4}$$

It depends on the length parameter

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} ,$$

which is called the Schwarzschild radius of the mass M.

The physical interpretation of the time variables τ and t is that $\mathrm{d}\tau$ is a small interval of proper time, as measured on a moving clock, whereas $\mathrm{d}t$ is a small time interval measured on a stationary clock infinitely far away. The interpretation of the radial coordinate r is that the circumference of a circle $r = R$ with its centre at the origin is $2\pi R$, and the area of the sphere $r = R$ with centre at the origin is $4\pi R^2$. The physical distance in the radial direction corresponding to the small coordinate interval $\mathrm{d}r$ is

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{R_M}{r}}} .$$

All of this can be read out of the Schwarzschild metric in Equation (4).

b) A small mass (a stone) at rest at the radius $r = r_0$, which is released and falls vertically onto the surface, hits the surface with velocity

$$v = c\sqrt{\frac{\frac{R_M}{R} - \frac{R_M}{r_0}}{1 - \frac{R_M}{r_0}}}\,. \tag{5}$$

This formula can also be derived from the Schwarzschild metric in Equation (4).

What will the velocity v become when we hold r_0 constant, at the same time as we make the radius R smaller until it approaches the Schwarzschild radius R_M?

Use Equation (5) to find a formula for the escape velocity.

The formula you find in this way is then valid in the general theory of relativity. Compare with the non-relativistic formula, Equation (2). Comment?

c) Assume now that $r_0 - R$ is small in Equation (5), that is, much smaller than the radius R. According to the Schwarzschild metric the height of fall h, i.e. the physical distance the stone is falling, is then given by the formula

$$h = \frac{r_0 - R}{\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}}\,. \tag{6}$$

Compute the velocity with which a cup of coffee hits the floor if it falls down from a table of height $h = 1$ m. Take four examples of values for the mass M and radius R: 1) the Earth, 2) the Sun, 3) a white dwarf of the same mass as the Sun and the same radius as the Earth, and 4) a neutron star of the same mass as the Sun and radius 15 km.

d) If $r_0 - R$ is small enough, the velocity v in Equation (5) will be much smaller than c, and then the non-relativistic formula in Equation (3) will be valid.

Use the Equations (3), (5) and (6) to derive a general relativistic formula for the acceleration of gravity g on the surface of the planet.

What happens to the acceleration of gravity if the radius R becomes so small that it approaches the Schwarzschild radius R_M?

Some physical constants and formulae

Newton's gravitational constant:	$G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
The speed of light in vacuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
The permeability of vacuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
The permittivity of vacuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
The reduced Planck's constant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
The elementary charge:	$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
The fine structure constant:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.036$
Boltzmann's constant:	$k = k_B = 1.3807 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
The Stefan–Boltzmann constant:	$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$
The electron mass:	$m_\mathrm{e} = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$
The proton mass:	$m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938.28\,\mathrm{MeV}/c^2$
The neutron mass:	$m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939.57\,\mathrm{MeV}/c^2$
The atomic mass unit:	$\mathrm{u} = 1.660\,54 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931.46\,\mathrm{MeV}/c^2$
The mass of the Earth:	$M_\oplus = 5.974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
The radius of the Earth:	$R_\oplus = 6.378 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$
The solar mass:	$M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
The solar radius:	$R_\odot = 6.960 \times 10^{5}\,\mathrm{km}$
The distance to the Sun (one astronomical unit):	$1\,\mathrm{AU} = 1.4960 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
The Hubble constant:	$H_0 = 70\,(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$
	1 pc = 1 parsec = 3.26 lightyears
	1 lightyear = 9.46×10^{15} m

Stefan–Boltzmann's law (flux F of blackbody radiation of temperature T): $F = \sigma T^4$.

Relation between apparent magnitude m and absolute magnitude M of a star at distance d:

$$m - M = 5\ \log_{10}\left(\frac{d}{10\ \mathrm{parsec}}\right).$$

For two stars 1 and 2 the following relations hold:

$$m_2 - m_1 \ = \ 2.5\ \log_{10}\left(\frac{b_1}{b_2}\right),$$
$$M_2 - M_1 \ = \ 2.5\ \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right).$$

Where b is (apparent) brightness and L is (absolute) luminosity.