



NTNU – Trondheim
Norwegian University of
Science and Technology

NTNU, DEPARTMENT OF PHYSICS

Exam FY2450 Spring 2020

Lecturer: Professor Jens O. Andersen
Department of Physics, NTNU

May 27 2020
09:00-13:00

Permitted examination support material:
No restrictions.

Read carefully. Good luck! Bonne chance! Viel Glück! Veel succes! Lykke til!

You have 15 min after the exam to upload your answers in Inspera as a pdf file

Norwegian text on pages 6-9.

Problem 1

NTNU2020 is a spectroscopic binary that was discovered recently. The mass of the primary Gløs is m_1 and the mass of the secondary Drag is m_2 . The orbits about the center-of-mass are circular, see Fig. 1.

The atmosphere of Gløs and Drag consists largely of the molecule Trondheimium, which has a famous line in its spectrum. In the lab, this line is at 601.7nm, i.e. it is in the visible part of the spectrum.

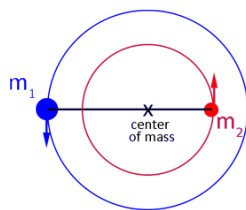


Figure 1: Spectroscopic binary NTNU2020.

a) A research group has measured the wavelength of this line in the absorption spectrum of NTNU2020. The result is shown in Table. 1, where P is the period of the orbit.

We define the inclination angle i as the angle between the normal vector of the orbital plane and the vector that points from the center-of-mass to the observer which is parallel to the line of sight. In Fig. 2, $i = \frac{\pi}{2}$.

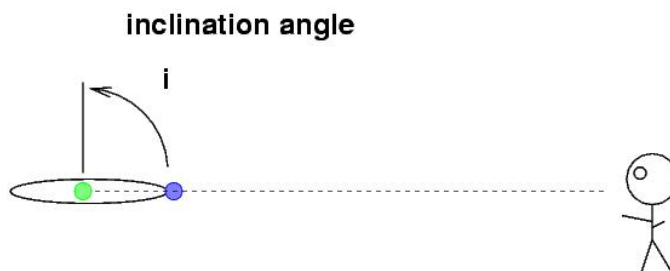


Figure 2: Inclination angle.

Time/P	$t = 0$	$t = P/4$	$t = P/2$	$t = 3P/4$
Wavelength Gløs	601.8nm	602.0nm	601.8nm	601.6nm
Wavelength Drag	601.8nm	601.6nm	601.8nm	602.0nm

Table 1: Measured wavelengths as a function of time.

We denote by v_1 and v_2 the orbital speeds of Gløs and Drag with respect to the center-of-mass. The inclination is $i = \frac{\pi}{2}$. Calculate v_1 , v_2 , and v_{cm} , where v_{cm} is the speed of the center-of-mass relative to the observer. Calculate the ratio $\frac{m_1}{m_2}$.

- b) Assume instead that the inclination angle is $i = 37^\circ$. Calculate the wavelengths that one would measure in this case.

Problem 2

- a) Calculate the binding energy for the ^{12}C isotope. Hint: The mass of the electrically neutral ^{12}C atom is 12 atomic mass units.
- b) What is the wavelength of a photon if its energy equals the binding energy found in a)? Is it in the visible part of the spectrum?

Problem 3

Consider the standard configuration with two inertial frames S and S' , see Fig. 3.

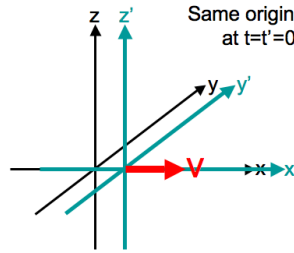


Figure 3: Standard configuration.

A photon has four-vector $(k^0, k^{x'}, k^{y'}, k^{z'}) = (\frac{\omega'}{c}, 0, \frac{\omega'}{c}, 0)$ in S' , i.e. it is propagating along the y' -axis.

- a) What is its frequency ω in S ? Find the spatial components of the four-vector of the photon in S expressed in terms of ω and its angle θ with the x -axis.
- b) A photon source is moving along the x -axis in an inertial frame S with speed

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + (\frac{gt}{c})^2}}. \quad (1)$$

It emits photons of frequency ω' in S' . The photons are propagating in the negative x' -direction. Find the Doppler shift as a function of t . What happens in the limit $t \rightarrow \infty$?

Problem 4

A comet is in a parabolic orbit lying in the plane of the Earth's orbit. Approximate the orbit of the Earth by a circle of radius R . This is shown in Fig. 4. Note however that with the orientation of the parabola, the Perihelion now corresponds to $\theta = 0$. The equation for the parabola is

$$r = \frac{r_0}{1 + \cos \theta} . \quad (2)$$

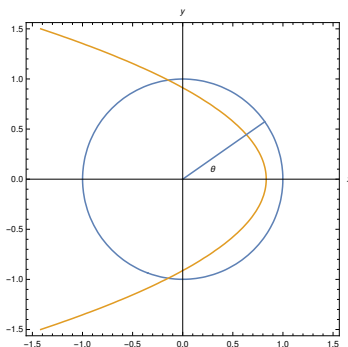


Figure 4: Blue curve is the circular orbit of the Earth and the yellow-brown curve is the parabolic orbit of the comet.

a) Show that the points where the orbit of the comet intersects the Earth's orbit are given by the equation

$$\cos \theta^* = -1 + \frac{r_0}{R} . \quad (3)$$

b) Show that the time T that the comet remains inside the Earth's circular orbit is

$$T = \frac{mr_0^2}{L} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} , \quad (4)$$

where L is the angular momentum of the comet. Hint: $\int_0^T dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(T)} \frac{dt}{d\theta} d\theta$.

c) The integral can be calculated and the result for T reads

$$T = \frac{2mr_0^2}{L} \frac{(2 + \cos \theta^*) \sin \theta^*}{3(1 + \cos \theta^*)^2} . \quad (5)$$

Show that one can write

$$T = \frac{2\sqrt{2}mr_0^2}{3L} \left(\frac{R}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r_0}{R} + 1\right) \sqrt{1 - \frac{r_0}{2R}} . \quad (6)$$

d) The relative time interval that the comet remains inside the Earth's orbit is the fraction

$$f = \frac{T}{T_{\text{Earth}}}, \quad (7)$$

where $T_{\text{Earth}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Show that the relative time interval is

$$f = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{r_0}{R} + 1 \right) \sqrt{1 - \frac{r_0}{2R}}. \quad (8)$$

f is a function of r_0 . Find the maximum value f_{max} . How many days does this correspond to?

Particle	Mass in MeV/ c^2
Atomic mass unit	931.5
Neutron	939.57
Proton	938.28
Electron	0.511

Table 2: Masses of different particles.

FY2450 vår 2020 Norsk oppgåvetekst

Du har 15 minutt etter eksamen til å laste opp svare dine i Inspira som pdf-fil

Oppgåve 1

NTNU2020 er ei spektroskopisk dobbeltstjerne som nyleg blei oppdaga. Massen til primærstjerna Gløs er m_1 og massen til sekundærstjerna Drag er m_2 . Banane rundt massesenteret er sirkulære, sjå Fig. 1.

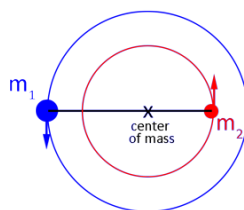


Figure 1: Spektroskopisk dobbeltstjerne NTNU2020.

Atmosfæren til Gløs og Drag består stort sett av molekylet Trondheimium som har ei kjend linje i spekteret. På laben er linja målt til 601.7nm, det vil seie at den er i den synlege delen av spekteret.

a) Ei forskningsgruppe har målt bølglengda til denne linja i absorpsjonsspekteret til NTNU2020. Resultatet av målingane er vist i tabell 1, der P er perioden til banen.

Vi definerer inklinasjonsvinkelen i som vinkelen mellom ein normalvektor til baneplanet og vektoren som peiker frå massesenteret til observatøren. I Fig. 2 er $i = \frac{\pi}{2}$.

Tid	$t = 0$	$t = P/4$	$t = P/2$	$t = 3P/4$
Bølglengde Gløs	601.8nm	602.0nm	601.8nm	601.6nm
Bølglengde Drag	601.8nm	601.6nm	601.8nm	602.0nm

Table 1: Målt bølglengde som funksjon av tida.

I oppgåva er v_1 og v_2 er banefarta til Gløs og Drag relativt til massesenteret. Inklinasjonsvinkelen er $i = \frac{\pi}{2}$. Finn v_1 , v_2 og v_{cm} , der v_{cm} er farta til massesenteret relativt til observatøren. Rekn ut brøken $\frac{m_1}{m_2}$.

b) Rekn ut bølglengdene ein ville målt viss inklinasjonsvinkelen var $i = 37^\circ$.

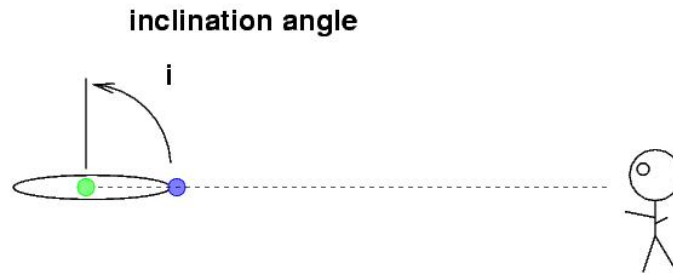


Figure 2: Inklinasjonsvinkelen.

Oppgave 2

- a) Rekn ut bindingsenergien til ^{12}C isotopen. Hint: Massen til det elektrisk nøytrale ^{12}C -atomet er 12 atommasseeiningar.
- b) Kva er bølgjelengda til eit foton som har energi lik bindingsenergien du fann i a)? Er bølgjelengda i den synlege delen av spekteret?

Oppgave 3

Vi skal studere to inertialsystem S og S' , der S' beveger seg langs x -aksen med fart v , sjå Fig. 3.

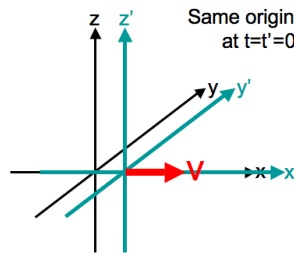


Figure 3: Standardsituasjonen.

Eit foton har firervektor $(k^0, k^{x'}, k^{y'}, k^{z'}) = (\frac{\omega'}{c}, 0, \frac{\omega'}{c}, 0)$ i S' , det vil seie at det propagerer langs y' -aksen.

a) Kva er frekvensen ω i S ? Finn dei romlege komponentane til firervektoren til fotonet i S uttrykt ved hjelp av ω og vinkelen θ med x -aksen.

b) Ei fotonkjelde bevegar seg langs x -axis i inertialsystemet S med farta

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}}. \quad (9)$$

Kjelda emitterer foton med frekvensen ω' i S' . Fotona propagerer mot venstre langs x' -aksen. Finn Dopplerverskyvninga som funksjon av t . Kva skjer i grensa $t \rightarrow \infty$?

Oppgåve 4

Ein komet går i ein parabelbane som ligg i baneplanet til jorda. Vi approksimerer banen til jorda med ein sirkel med radius R . Dette er vist i Fig. 4. Ver obs på at med orienteringa av parabelen tilsvarer Perihelion vinkelen $\theta = 0$. Likninga for parabelen er

$$r = \frac{r_0}{1 + \cos \theta}. \quad (10)$$

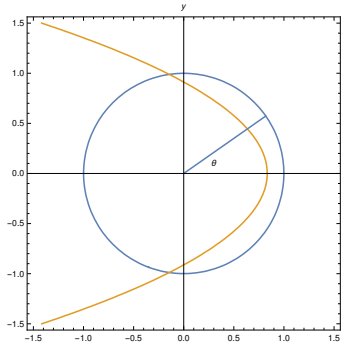


Figure 4: Den blå kurva er sirkelbanen til jorda og den gulbrune kurva er parabelbanen til kometen.

a) Vis at punkta der banen til kometen skjer sirkelbanen til jorda er gjevne ved likninga

$$\cos \theta^* = -1 + \frac{r_0}{R}. \quad (11)$$

b) Vis at tida T der kometen er innafor sirkelbanen til jorda er

$$T = \frac{mr_0^2}{L} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}, \quad (12)$$

der L er dreieimpulsen til kometen. Hint: $\int_0^T dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(T)} \frac{dt}{\frac{d\theta}{dt}} d\theta$.

c) Ein kan rekne ut integralet og resultatet for T er

$$T = \frac{2mr_0^2}{L} \frac{(2 + \cos \theta^*) \sin \theta^*}{3(1 + \cos \theta^*)^2}. \quad (13)$$

Vis at ein kan skrive

$$T = \frac{2\sqrt{2}mr_0^2}{3L} \left(\frac{R}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r_0}{R} + 1\right) \sqrt{1 - \frac{r_0}{2R}}. \quad (14)$$

d) Det relative tidsintervallet der kometen er innanfor jordas sirkelbane er brøken

$$f = \frac{T}{T_{\text{Earth}}}, \quad (15)$$

der $T_{\text{Earth}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Vis at f kan skrivast som

$$f = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{r_0}{R} + 1\right) \sqrt{1 - \frac{r_0}{2R}}. \quad (16)$$

f er ein funksjon av r_0 . Finn maksimalverdien f_{max} . Kor mange dagar svarer dette til?

Partikkel	Masse i MeV/ c^2
Atommasseeining	931.5
Nøytron	939.57
Proton	938.28
Elektron	0.511

Table 2: Massen til ulike partiklar.