Løsning, eksamen FY2450 Astrofysikk
Onsdag 20. mai 2009

1a) Kuleformede stjernehoper (kulehoper) inneholder et stort antall stjerner, 10^4 til 10^6, som alle er gamle, opptil 12 milliarder år. De inneholder lite støv og gass til å lage unge og massive stjerner av. De har kuleform med sterk konsentrasjon mot sentrum. De tilhører haloen til Melkeveien, dvs. at de fordeler seg i et kuleformet volum omkring sentrum i Melkeveien.

Åpne stjernehoper inneholder få stjerner, opptil noen tusen, som alle er unge (i astronomisk målestokk), opptil noen hundre millioner år. De ligger i skiven i Melkeveien, og kalles derfor galaktiske stjernehoper. De er lite stabile, og forsvinner ved at de går i oppløsning slik at stjernene som tilhører dem, sprer seg blant alle andre stjerner i Melkevei-skiven.

De fleste (eller alle) galakser har kuleformede stjernehoper, mens åpne stjernehoper observeres bare i spiralgalakser og irregulære galakser, og ikke i elliptiske galakser, der det observeres få unge stjerner.

1b) Den teoretiske forklaringen er at stjerner av populasjon II, som finnes i kulehoper, er gamle, mange milliarder år, mens stjerner av populasjon I, som finnes i åpne hoper, er unge, ofte bare noen få millioner år gamle.

Stjernene i en kulehop har masser som er maksimalt en solmasse, omtrent, fordi de stjernene i hopen som en gang hadde større masse, er brent ut for lenge siden. Hovedserietjerner med liten masse har liten radius og lav overflatetemperatur, og er å finne i nedre høyre hjørne av Hertzsprung–Russell-diagrammet.

En observerbar konsekvens er fargen: stjernene i kulehopen er røde og gule, ikke blå. En annen observerbar konsekvens er at spekteret til en slik stjerne har få spektrallinjer (absorpsjonslinjer): det materialet som den ble dannet av for mange milliarder år siden, inneholdt lite av grunnstoffer tyngre enn helium (det astronomene kaller metaller).

Stjernene i åpne hoper har en annen farge, de mest lyssterke stjernene der er blå kjempestjerner som ikke er gamle nok til å ha brent ut. De har dessuten spektra med mange flere absorpsjonslinjer, fordi de er dannet av materiale som delvis er prosessert i tidligere generasjoner av stjerner og anriket på tyngre grunnstoffer.

1c) Shapley målte avstand og retning til (nesten) alle kulehopene, og fant sentrum av den tredimensjonale samlingen av kulehoper. Så antok han at dette også var sentrum av Melkeveien.

2a) Hubbles lov er en sammenheng mellom avstanden d til en galakse og rødforskyvningen $z = (\lambda/\lambda_0) - 1$ av spektrallinjene i lyset fra galaksen (λ_0 er bølgelengden som sendes ut, λ er bølgelengden som observeres).

Når vi tolker rødforskyvningen som en Doppler-effekt, betyr den at galaksen beveger seg bort fra oss med hastighet $v = cz$ (c er lyshastigheten). Hubbles lov sier at $v = H_0 d$, der H_0 er en konstant, Hubble-konstanten.

For å måle H_0 må vi altså måle rødforskyvning z og avstand d for mange galakser. Forskjellige metoder kan brukes til å måle avstander, f.eks. å observere Cepheider, som er periodiske variable stjerner med en kjent relasjon mellom periode og luminositet.

Hvis vi antar (bare som en enkel gjetning) at en galakse har beveget seg bort fra oss hele tiden med en konstant hasighet v, så har den beveget seg fra avstand null til avstand d i løpet av tiden $t_0 = d/v$, som da er alderen til universet. Hubbles lov $v = H_0 d$ gir at $t_0 = 1/H_0$. Antagelsen om konstant hastighet er ganske sikkert ikke helt korrekt, men i alle fall er $1/H_0$ en tilnærmet verdi for alderen til universet.

Antagelsen om at hver galakse har konstant hastighet bort fra oss, gir forresten også den omvendte relasjonen $H_0 = 1/t_0$, som sier at Hubble-konstanten ikke er konstant, men avtar etter hvert som universet blir eldre. Men dette er altså bare en antagelse. Hvis Hubble-konstanten faktisk er konstant, så betyr det at universet utvider seg eksponensielt. Eksponensiell ekspansjon kalles også inflasjon, og kan forklares teoretisk som et resultat av at energitettheten domineres av vakuumenergi.

Den numeriske verdien av Hubble-tiden er

$$\frac{1}{H_0} = \frac{1\ \mathrm{Mpc}}{70\ \mathrm{km/s}} = \frac{10^6 \times 3{,}26 \times 3 \times 10^5\ \mathrm{km/s} \times 1\ \mathrm{år}}{70\ \mathrm{km/s}} = 1{,}40 \times 10^{10}\ \mathrm{år}\ .$$

2b) Den kritiske energitettheten er nå

$$\rho_{c0}\, c^2 = 9{,}2\ 10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3} \times (3{,}0\ 10^8\ \mathrm{m/s})^2 = 8{,}3\ 10^{-10}\ \mathrm{J/m^3}\ .$$

Nåværende kritisk massetetthet uttrykt i andre enheter:

$$\rho_{c0} = 9{,}2\ 10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3} \times \frac{M_\odot}{2{,}0\ 10^{30}\ \mathrm{kg}} \times \left(\frac{9{,}46\ 10^{15}\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{lysår}}\right)^3 = 3{,}9\ 10^{-9}\ M_\odot/(\mathrm{lysår})^3\ .$$

Hvis massen til en typisk galakse er $10^{11}\ M_\odot$, så er galaksetettheten (antallet galakser pr. volum) lik

$$\frac{\rho_{c0}}{10^{11}\ M_\odot} = 3{,}9\ 10^{-20}/(\mathrm{lysår})^3 = 1/(2{,}56\ 10^{19}\ (\mathrm{lysår})^3) = 1/(2{,}95\ 10^6\ \mathrm{lysår})^3\ .$$

Den kritiske massetettheten tilsvarer, etter dette regnestykket, at den gjennomsnittlige avstanden mellom galaksene skulle være 3 millioner lysår.

I hvert fall i vårt nærmeste nabolag er den gjennomsnittlig avstanden mellom galaksene atskillig større enn som så. Det viser at tettheten av lysende materie i universet (stjerner i galakser) er atskillig mindre enn den kritiske massetettheten.

2c) Et elektrisk felt med energitetthet lik den kritiske energitettheten for universet er

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{2\rho_{c0}\, c^2}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1{,}66\ 10^{-9}\ \mathrm{J/m^3}}{8{,}854\ 10^{-12}\ \mathrm{F/m}}} = 13{,}7\ \mathrm{V/m}\ .$$

At det skulle kunne finnes elektriske felt i verdensrommet av denne størrelsesorden er kanskje ikke helt urealistisk? Til sammenligning finnes det et elektrisk felt på 100 V/m i jordatmosfæren, mellom jordoverflaten og elektriske ladninger i atmosfæren. Med andre ord: hvis du er en dårlig leder, er potensialforskjellen mellom hodet og føttene så mye som et par hundre volt når du står på bakken, under åpen himmel! Hvis du er en god leder (og det er de fleste), er det ingen potensialforskjell mellom hodet og føttene.

Et magnetisk felt med energitetthet lik den kritiske energitettheten for universet har en flukstetthet som er

$$|\vec{B}| = \sqrt{2\rho_{c0}\, c^2 \mu_0} = \sqrt{1{,}66\ 10^{-10}\ \mathrm{J/m^3} \times 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}} = 4{,}57 \times 10^{-8}\ \mathrm{T}\ .$$

Dette er heller ikke en helt urealistisk verdi, magnetfelt som observeres i galakser er typisk 1/10 av dette.

Her er en alternativ måte å regne ut magnetfeltet på. Vi har at $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, og følgelig

$$|\vec{B}| = \sqrt{2\rho_{c0}\, c^2 \mu_0} = \sqrt{\frac{2\rho_{c0}}{\epsilon_0}} = \frac{|\vec{E}|}{c}\ ,$$

der $|\vec{E}|$ er den verdien vi regnet ut ovenfor.

Mange kommenterer at magnetfeltet er mye mindre enn det elektriske feltet, for samme energitetthet, men det blir galt. $|\vec{E}|$ og $|\vec{B}|$ er ikke direkte sammenlignbare størrelser, fordi de har forskjellig dimensjon (i MKSA-enheter). Skal de sammenlignes, må vi først multiplisere $|\vec{B}|$ med en eller annen hastighet, for å gjøre dimensjonene like. Multipliserer vi med lyshastigheten c, så blir tallverdiene like.

2d) Hvis vi setter

$$\nu_2 = \frac{c}{L_P} = \frac{3{,}0\ 10^8\ \mathrm{m/s}}{1{,}6\ 10^{-35}\ \mathrm{m}} = 1{,}87\ 10^{43}/\mathrm{s}\ ,$$

og anslår vakuumenergitettheten for det elektromagnetiske feltet til å være

$$\rho_{\mathrm{v}} c^2 = \int_0^{\nu_2} \mathrm{d}\nu\ \frac{4\pi h \nu^3}{c^3} = \frac{\pi h {\nu_2}^4}{c^3} = \frac{2\pi^2 \hbar c}{L_P^4} = 2\pi^2 \hbar c \left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)^2 = \frac{2\pi^2 c^7}{\hbar G^2}\ ,$$

så finner vi den numeriske verdien

$$\rho_{\mathrm{v}} c^2 = \frac{2\pi^2 \times 1{,}055\ 10^{-34}\ \mathrm{Js} \times (1{,}87\ 10^{43}/\mathrm{s})^4}{(3{,}0\ 10^8\ \mathrm{m/s})^3} = 9{,}4\ 10^{114}\ \mathrm{J/m^3}\ .$$

Dette svaret er 10^{124} ganger så stort som den kritiske energitettheten $\rho_{c0}\, c^2$. Det påstås, ikke uten grunn, at dette er den galeste teoretiske forutsigelsen i hele fysikken.

3a) Avstanden til alle de tre stjernene er $d = 23{,}6$ parsec. Avstandsmodulus μ, definert som differensen mellom størrelsesklassen m (den tilsynelatende størrelsesklassen) og den absolutte størrelsesklassen M, er da den samme for alle tre,

$$\mu = m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d}{10\ \mathrm{parsec}}\right) = 5 \log_{10} 2{,}36 = 1{,}9\ (1{,}86)\ .$$

Den absolutte størrelsesklassen, $M = m - \mu$, blir da for de tre stjernene:

$$M_A = 2{,}8 - 1{,}9 = 0{,}9\ , \qquad M_B = 5{,}2 - 1{,}9 = 3{,}3\ , \qquad M_C = 13{,}2 - 1{,}9 = 11{,}3\ .$$

Stjernen C er svært lyssvak, og et godt tips er at den er en rød dverg som tilhører spektralklasse M.

3b) Ta for eksempel stjernene A og B. At avstanden er 23,6 parsec, betyr at en vinkelavstand på $1''$ mellom de to stjernene tilsvarer en avstand på 23,6 AU vinkelrett på synsretningen. Vi er ikke i stand til å måle avstanden mellom dem langs synsretningen, så vi kan ikke gjøre så mye annet enn å se bort fra den. Det gir oss en nedre grense for avstanden. Når vinkelavstanden er $231''$, så tilsvarer det en avstand på

$$a = 231 \times 23{,}6 \text{ AU} = 5450 \text{ AU} .$$

Massene til stjernene kjenner vi ikke, men de har større luminositet enn Sola (som har spektralklasse G2 og absolutt størrelsesklasse 4,8). Derfor har de sikkert større masse, vi kan gjette på at summen av massene kanskje er $m_1 + m_2 = 5\ M_\odot$. Alle stjerner har stort sett samme masse, innenfor en faktor 2 eller 10. Keplers tredje lov gir da en periode som er

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}} = 1 \text{ år} \sqrt{\frac{5450^3}{5}} = 180\,000 \text{ år} .$$

Det finnes en bakdør inn til det riktige svaret. Under punkt 3d) opplyses det at to av stjernene har en vinkelavstand på $0{,}38''$ og en omløpsperiode på 5870 dager. Når vinkelavstanden er $231''$, og vi antar at massene er omtrent de samme, så blir omløpsperioden (vi bruker stadig Keplers tredje lov)

$$P = \left(\frac{231''}{0{,}38''}\right)^{\frac{3}{2}} \times 5870 \text{ dager} = 8{,}80\ 10^7 \text{ dager} = 241\,000 \text{ år} .$$

Et litt annet svar enn ovenfor, men like korrekt, siden vi uansett bare gjetter på hvor store massene er.

3c) Siden et teleskop med en lysåpning på 10 cm har en vinkeloppløsning på $1''$, vil et teleskop med en lysåpning på 10 cm/111 = 1 mm (!!) ha god nok vinkeloppløsning til å skille alle de tre stjernene. Det nakne øyet har altså god nok vinkeloppløsning.

En kan fotografere lyssvake stjerner ved å eksponere over lang tid, selv med et teleskop som har liten lysåpning, for eksempel et alminnelig kamera.

Det nakne øyet, derimot, ser bare stjerner ned til og med størrelsesklasse 6, altså bare så vidt B-stjernen, og absolutt ikke C-stjernen. Derfor må øyet ha hjelp av et teleskop til å samle lys. For å se en stjerne av størrelsesklasse 13,2, eller la oss si 14, må en øke lysstyrken med 8 størrelsesklasser, fra 14 til 6, det vil si en faktor

$$f = 100^{8/5} = 1585 ,$$

ettersom 5 størrelsesklasser tilsvarer en faktor 100 i lysstyrke. Da trengs det et teleskop med en lysåpning som er minst

$$\sqrt{f} \times 5 \text{ mm} = 20 \text{ cm} .$$

Det ble spurt etter hvor stor forstørrelse som er nødvendig. Forstørrelsen til et teleskop angir hvor mange ganger vinkelavstanden mellom to stjerner forstørres, når en ser med øyet gjennom teleskopet. Øyet alene har en vinkeloppløsning på $20''$, som er mer enn godt nok. Det trengs altså ikke noen forstørrelse i det hele tatt.

3d) En vinkelavstand på $1''$ tilsvarer en avstand på 23,6 AU vinkelrett på synsretningen. En vinkelavstand på $0{,}38''$ tilsvarer en avstand

$$a = 0{,}38 \times 23{,}6 \text{ AU} = 9{,}0 \text{ AU} .$$

Når vi antar at dette er store halvakse i ellipsebanen, og bruker Keplers tredje lov, finner vi summen av massene, $m_1 + m_2$, ved at

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \left(\frac{9,0 \text{ AU}}{1 \text{ AU}}\right)^3 \times \left(\frac{365{,}25 \text{ dager}}{5870 \text{ dager}}\right)^2 = 2{,}82 .$$

Det må bety at den mest massive av de to stjernene har en masse på rundt 2 solmasser. Det stemmer generelt med at en F4 hovedseriestjerne er litt større enn Sola: har litt større masse, litt høyere overflatetemperatur og litt større lysstyrke.

3e) Avstanden (stadig vinkelrett på synsretningen) er

$$a = 0{,}01 \times 23{,}6 \text{ AU} = 0{,}24 \text{ AU} .$$

De to stjernene hver for seg har luminositeter $L_1 = L_2 = L$, størrelsesklasser $m_1 = m_2 = m$ og absolutte størrelsesklasser $M_1 = M_2 = M$. Dobbeltstjernesystemet har luminositet $L' = L_1 + L_2 = 2L$ og størrelsesklasse $m' = 2{,}8$. Når vi sammenligner stjerner i samme avstand, gjelder i følge en oppgitt formel at

$$m - m' = M - M' = 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{L'}{L}\right) = 2{,}5 \log_{10} 2 = 0{,}75 .$$

Størrelsesklassen til en av de to stjernene er altså

$$m = m' + 0{,}75 = 3{,}55 .$$

3f) Spørsmålet er hvor lang tid Månen bruker på å bevege seg $0{,}01''$ på himmelen i forhold til fiksstjernene. Månen går en gang rundt Jorda i løpet av en måned (en mer nøyaktig verdi for perioden er 27,3 døgn, men det spiller ikke så stor rolle). Den tiden det spørres etter, er

$$t = 27{,}3 \times 24 \times 3600 \text{ s} \times \frac{0{,}01''}{360 \times 3600''} = 0{,}018 \text{ s} .$$

Det trengs altså en god klokke for å måle dette tidsintervallet! Metoden er å måle strømmen fra en fotoelektrisk detektor.

Dette svaret tar ikke hensyn til jordrotasjonen (men godkjennes som svar på oppgaven). Hvis vi observerer Månen rett i øst eller rett i vest, så har ikke jordrotasjonen noe å si, fordi vår hastighet på grunn av jordrotasjonen har retning rett mot eller rett bort fra Månen. Hvis vi derimot observerer Månen rett i sør, så vil vår hastighet på grunn av jordrotasjonen ha retning parallelt med banehastigheten til Månen. Månen har en masse som er ca. 1/80 av jordmassen, og middelavstanden fra Jorda til Månen er 384 000 km. Banehastigheten til Månen er da

$$v_M = \frac{80}{81} \frac{2\pi \times 384\,000 \text{ km}}{27{,}3 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 1{,}01 \text{ km/s} .$$

Jordradien er 6378 km, og en observatør på ekvator har en hastighet på grunn av jordrotasjonen som er

$$v_O = \frac{2\pi \times 6378 \text{ km}}{24 \times 3600 \text{ s}} = 0{,}46 \text{ km/s} .$$

Denne observatøren ser derfor Månen bevege seg på himmelen med en vinkelhastighet som er

$$\frac{(1{,}01 - 0{,}46) \text{ km/s}}{(384\,000 - 6378) \text{ km}} = 1{,}46\ 10^{-6} \text{ /s} = 1{,}46\ 10^{-6} \text{ /s} \, \frac{180 \times 3600''}{\pi} = 0{,}30'' \text{ /s} .$$

Sammenlignet med den vinkelhastigheten som ikke er korrigert for jordrotasjonen,

$$\frac{1{,}01 \text{ km/s}}{384\,000 \text{ km}} = 2{,}63\ 10^{-6} \text{ /s} = 2{,}63\ 10^{-6} \text{ /s} \, \frac{180 \times 3600''}{\pi} = 0{,}54'' \text{ /s} .$$

Tiden mellom de to okkultasjonene øker altså fra 0,018 s til 0,033 s for en observatør på ekvator som ser Månen rett i sør.

Dette regnestykket bruker data som ikke ble oppgitt. Men de fleste vil forhåpentligvis vite at en måned er omtrent den tiden som Månen bruker på et omløp rundt Jorda.

3g) Det kvalitative argumentet er at når stjernene går i bane rundt hverandre, vil det være slik at hvis vi tilfeldigvis ser dem i posisjoner der de er mer eller mindre linjert opp den ene bak den andre, så vil de bevege seg på tvers av synsretningen og ganske fort bort fra den posisjonen der de er opplinjert. Det er følgelig størst sannsynlighet for å se et dobbeltstjernesystem i en slik posisjon at den avstanden vi observerer direkte, vinkelrett på synsretningen, ikke er så mye mindre enn den faktiske tredimensjonale avstanden.

Hvis de to stjernene går i en sirkelbane med radius a, vil den observerte avstanden a', vinkelrett på synsretningen, alltid være mindre enn eller lik a.

Hvis banen er mer eller mindre elliptisk, så sier Keplers 2. lov at de tilbringer mest tid i den delen av banen der avstanden mellom dem er størst. Hvis eksentrisiteten i ellipsen er stor, er det stor sannsynlighet for at vi observerer en avstand a' som faktisk er større enn den store halvaksen a i ellipsebanen.

Hvis vi antar at avstanden mellom de to stjernene er konstant lik a, altså at banen er sirkelformet, så kan vi også resonnere kvantitativt. Hvis vi observerer bare ett punkt på banen, kan vi ikke gjøre så mye annet enn å anta at vektoren $\vec{r}$ fra den ene stjernen til den andre har en tilfeldig retning i forhold til retningen mot oss.

Vi kan legge et koordinatsystem med z-aksen i retning mot oss. Da vil vi kunne observere to komponenter av $\vec{r}$, nemlig $x = a \sin\theta \cos\varphi$ og $y = a \sin\theta \sin\varphi$, men ikke den tredje, $z = a\cos\theta$. Her er θ og φ de vanlige polarvinklene. Den observerte avstanden, vinkelrett på synsretningen, er $a' = \sqrt{x^2+y^2} = a\sin\theta \leq a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. For en gitt vinkel θ_0 (anta f.eks. at $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$) er sannsynligheten for å observere $a' \geq a\sin\theta_0$ lik

$$P(\sin\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sin\theta \geq \sin\theta_0} \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \mathrm{d}\theta\ \sin\theta = \cos\theta_0 = \sqrt{1-\sin^2\theta_0} .$$

For eksempel er

$$P(0{,}9) = \sqrt{1-(0{,}9)^2} = \sqrt{0{,}1 \times 1{,}9} = 0{,}44 .$$

Med andre ord er det 44 % sannsynlighet for å observere en avstand mellom stjernene som ikke er mer enn 10 % feil. Det gjelder altså dersom banen er sirkulær.