Løsning, eksamen FY2450 Astrofysikk
Lørdag 21. mai 2011

1a) En kuleformet stjernehop kan inneholde fra ti tusen opp til flere millioner stjerner, innenfor et noenlunde kuleformet volum med radius på noen titalls lysår. Stjernene der er gamle, 10 milliarder år eller mer (populasjon II), det vet vi fordi de mest lyssterke hovedseriestjernene mangler, de har allerede brent ut, og vi ser lite spektrallinjer av det astronomene kaller metaller, det vil si grunnstoffer tyngre enn helium. De tyngre grunnstoffene kan finnes inne i stjernene, der de produseres, men ikke på overflaten, der vi kunne ha observert dem.

En åpen, eller galaktisk, stjernehop inneholder færre stjerner, fra noen titalls opp til noen hundre, innenfor et volum omtrent like stort som volumet til en kuleformet stjernehop. De fleste galaktiske stjernehopene er unge, fra noen millioner år opp til noen få milliarder år (stjernene tilhører populasjon I). De er ikke så tett bundet gravitasjonelt, og fordi de finnes i områder med mange andre stjerner og mye gass, brytes de opp etter hvert og forsvinner.

Som navnet sier, er galaktiske stjernehoper å finne i galaksen, det vil si i den flate skiven der det meste av både stjerner, gass og støv er å finne. De kuleformete stjernehopene finnes i et større volum, de fordeler seg mer eller mindre kulesymmetrisk omkring sentrum i Melkeveien. Teoretiske modeller går ut på at Melkeveien var nærmere kuleformet til å begynne med, altså da de kuleformete stjernehopene ble dannet, men har flatet seg ut etter hvert på grunn av rotasjonen. Galaktiske stjernehoper er yngre, de dannes hele tiden av gass og støv i galakseskiven.

1b) Den tilsynelatende størrelsesklassen m til en stjerne er et mål på energifluksen inn i en detektor (energi pr. tid og areal). Den kan måles elektronisk (med en CCD-brikke eller en fotomultiplikator, begge basert på den fotoelektriske effekten), eller simpelthen med øyet som detektor. For å slippe en absolutt kalibrering av detektoren, kan vi sammenligne den stjernen som skal måles, med andre stjerner som har kjente verdier for størrelsesklassen.

For å finne den absolutte størrelsesklassen M må vi dessuten måle avstanden d, f.eks. ved å måle parallaksen. Så regner vi ut

$$M = m - 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\ \text{parsec}}\right).$$

Fargeindeksen $B - V$ er $m_B - m_V$, der m_B er størrelsesklassen til stjernen målt med et standard B-filter som slipper gjennom blått lys (bølgelengder rundt 435 nm), og m_V er størrelsesklassen målt med et standard V-filter som slipper gjennom lys midt i den synlige delen av spektret (bølgelengder rundt 555 nm). Skalaene for måling av størrelsesklasser er definert slik at $m_B = m_V$ for stjerner av spektralklasse $A0$.

Spektralintensiteten i strålingen fra en stjerne ligner mye på svart stråling med en bestemt temperatur T. Den bølgelengden $\lambda_{\max}$ der intensiteten i svart stråling er maksimal, er gitt av temperaturen ved Wiens forskyvningslov,

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}9\ \text{mm K}}{T}\ .$$

Hvis temperaturen øker, så reduseres $\lambda_{\max}$. Intensiteten av kortbølget lys øker mer enn intensiteten av langbølget lys, slik at stjernen ser mer blå ut, og fargeindeksen $B - V$ får en mindre verdi.

Hvis vi måler fargeindeksen til den samme stjernen i to forskjellige avstander d_1 og d_2, får vi samme verdi. Hvis vi forandrer avstanden til stjernen fra d_1 til d_2, så forandrer det størrelsesklassen fra m_1 til m_2, med

$$m_2 - m_1 = 5 \log_{10}\left(\frac{d_2}{d_1}\right).$$

Siden m_B og m_V får det samme tillegget, forandres ikke fargeindeksen $m_B - m_V$.

Noen blander inn kosmologisk rødforskyving og Hubbles lov her når det er snakk om fargeindeks og avstandmåling. Men det er fenomener som gjør seg gjeldende først når avstandene blir minst en million ganger større!

1c) Hvis vi antar at alle stjernene i en stjernehop er omtrent like gamle, så skal Hertzsprung–Russell-diagrammet for en nydannet stjernehop være et ganske smalt diagonalt bånd, som er hovedserien ved null alder (ZAMS = Zero Age Main Sequence).

Massen av stjernene er størst i det øverste venstre hjørnet av diagrammet, og avtar nedover mot det nederste høyre hjørnet. De mest massive stjernene har kortest levetid på hovedserien, de er de første til å forlate hovedseriestadiet og bevege seg mot høyre og oppover i diagrammt.

I en middelaldrende galaktisk eller eldgammel kuleformet stjernehop vil hele den nederste høyre delen av hovedserien i HR-diagrammet fremdeles være på plass, disse stjernene har liten masse og lang levetid, og har ikke hatt tid til å utvikle seg lenger enn til hovedseriestadiet. Men på ett nokså veldefinert punkt i diagrammet stopper hovedserien, og alle stjernene som opprinnelig var på hovedserien lenger oppe til venstre, har utviklet seg videre og blitt røde kjempestjerner, supernovaer eller hvite dverger. Kuleformete stjernehoper inneholder mange hvite dverger.

I HR-diagrammet for Sjustjernen ser vi hele hovedserien, bortsett fra at den aller øverste venstre enden av båndet har begynt å bøye av oppover. Avbøyingen starter omtrent ved absolutt størrelsesklasse 1. Dette er en svært ung stjernehop. Den inneholder selvfølgelig adskillig flere enn sju stjerner.

I HR-diagrammet for M67 ser vi omtrent nederste høyre halvpart av hovedserien, den andre halvparten er borte, og noen få av de stjernene finnes igjen til høyre og litt opp fra der de ville ha vært på hovedserien. Båndet som representerer hovedserien, starter å bøye av omtrent ved absolutt størrelsesklasse 4. Få stjerner i diagrammet er mer lyssterke enn absolutt størrelsesklasse 4, det skyldes nok at stjernene utvikler seg ganske raskt etter at de forlater hovedserien, og at hopen inneholder relativt få stjerner, selv om de er flere enn i Sjustjernen.

HR-diagrammet for 47 Tucanae ligner mye på diagrammet for M67, men inneholder mange ganger så mange stjerner, derfor ser vi her stjerner i mange kortvarige utviklingstadier. Hovedserien i dette diagrammet starter å bøye av omtrent ved absolutt størrelsesklasse 4,5 til 5, det skulle tyde på at denne hopen er enda eldre enn M67.

Det er et lite problem når vi sammenligner HR-diagrammene for M67 og 47 Tucanae. Hovedserien slutter ved litt forskjellig absolutt størrelsesklasse, men ved samme fargeindeks, ca. $B - V = 0{,}6$, og det stemmer ikke med at det skal være en entydig sammenheng mellom de to variablene for hovedseriestjerner. For å finne den absolutte størrelsesklassen må vi kjenne avstanden, mens vi kan måle fargeindeksen uten å kjenne avstanden. Derfor skulle en tro at fargeindeksen er bedre målt enn den absolutte størrelsesklassen. Hvis hovedserien faktisk bryter av ved samme fargeindeks, så skulle det bety at de to stjernehopene er like gamle. Aksepterte verdier for alderen er 3,2 til 5 milliarder år for M67 og 10 milliarder år for 47 Tucanae.

1d) For å avgjøre om en stjerne som vi observerer, er en hovedseriestjerne, plasserer vi den i Hertzsprung–Russell-diagrammet og ser om den havner innenfor hovedserien.

Teoretiske modeller går ut på at hydrogen omdannes til helium i sentrum av en hovedseriestjerne.

Levetiden t til en stjerne er lik mengden av kjernefysisk brensel dividert med brenselsforbruket pr. tid, derfor er den grovt regnet proporsjonal med massen M dividert med luminositeten L. Altså,

$$t = \text{konstant} \times \frac{M}{L} = \text{konstant} \times M^{1-\alpha} = \text{konstant} \times M^{-2} = \text{konstant} \times L^{-\frac{2}{3}} \ .$$

Hvis vi sier at hovedserien for Sjustjernen går opp til absolutt størrelsesklasse $M_1 = 1$, og at hovedserien for M67 går opp til absolutt størrelsesklasse $M_2 = 4$, så kan vi beregne forholdet mellom alderen til M67 og alderen til Pleiadene som

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(10^{\frac{M_1 - M_2}{2.5}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 10^{\frac{(-3)}{2.5}\,(-\frac{2}{3})} = 10^{0.8} = 6{,}3 \ .$$

I følge Wikipedia er alderen til Sjustjernen mellom 75 og 150 millioner år, med en usikkerhet som skyldes usikkerhet i de teoretiske modellene, mens alderen til M67 er 3,2 til 5 milliarder år. Aldersforholdet skal altså være nærmere 40 enn 6. Trøsten er at det vi gjør her, er et ganske grovt overslag.

2a) Stjernen ESO 439–26 har avstandsmodulus

$$\mu = 5\,\log_{10}\left(\frac{140 \text{ lysår}}{10 \text{ parsec}}\right) = 5\,\log_{10}\left(\frac{140}{32{,}6}\right) = 3{,}16 \ ,$$

og absolutt visuell størrelsesklasse

$$M_V = m_V - \mu = 20{,}5 - 3{,}16 = 17{,}34 \ .$$

For å gjøre den synlig med øyet må vi flytte den så nært at den får visuell størrelsesklasse 6, altså til en avstand d slik at

$$6 = 20{,}5 + 5\,\log_{10}\left(\frac{d}{140 \text{ lysår}}\right) .$$

Avstanden må være

$$d = 140 \text{ lysår} \times 10^{-\frac{14.5}{5}} = 0{,}176 \text{ lysår} = 0{,}054 \text{ parsec} \ .$$

En avstand på 140 lysår kan (så vidt) måles ved parallaksemetoden: vi observerer hvor mye synsvinkelen til stjernen forandres over et år, i forhold til fjerne stjerner. En forandring på to buesekunder tilsvarer en avstand på en parsec, lik 3,26 lysår.

2b) Luminositeten til en stjerne med radius R og overflatetemperatur T er

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \ ,$$

der σ er Stefan–Boltzmanns konstant.

Sammenligning av luminositetene til ESO 439–26 og Sola, som har absolutt visuell størrelsesklasse 4,8, gir da at

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{R^2 T^4}{R_\odot^{\ 2} T_\odot^{\ 4}} = 10^{\frac{4,8-17,34}{2,5}} = 9{,}6\ 10^{-6} \ .$$

Altså,

$$R = R_\odot \frac{T_\odot^{\ 2}}{T^2} \sqrt{9{,}6\ 10^{-6}} = R_\odot \frac{5780^2}{4560^2} \sqrt{9{,}6\ 10^{-6}} = R_\odot \times 5{,}0\ 10^{-3} = 3500 \text{ km} \ .$$

Setter vi $Z = 6$ og $A = 12$ inn i den oppgitte formelen, finner vi at massen skal være

$$M = \left(\frac{6}{12}\right)^5 \frac{4{,}295\ 10^{52} \text{ kg m}^3}{(3{,}5\ 10^6 \text{ m})^3} = 3{,}1\ 10^{31} \text{ kg} = 15{,}5\ M_\odot \ .$$

Det går ikke an, siden en hvit dverg ikke kan ha masse større enn Chandrasekhar-massen på 1,4 solmasser.

Vi gjør ikke saken så mye bedre om vi prøver jern, med $Z = 26$ og $A = 56$, det gir en masse

$$M = 2{,}2\ 10^{31} \text{ kg} = 11\ M_\odot \ .$$

Den forutsetningen som tydeligvis ikke holder, er at den degenererte elektrongassen er ikke-relativistisk.

Når elektronene blir relativistiske, så blir tilstandsligningen for den degenererte elektrongassen mindre "stiv", dvs. at trykket ikke lenger øker like raskt med tettheten. For en gitt masse blir stjernen dermed klemt sammen til en mindre radius. Denne hvite dvergstjernen trenger da mindre masse for å få en så liten radius som 3500 km.

3a) Tyngdens akselerasjon på overflaten av planeten, i følge Newton, er

$$g = \frac{GM}{R^2} \ .$$

Uendelig langt borte, når $r \to \infty$, er den potensielle energien $-GMm/r = 0$, og den konstante totale energien er $E = (1/2)mv^2 \geq 0$. Massen m kan altså bevege seg uendelig langt bort hvis og bare hvis

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \ ,$$

det vil si at

$$v \geq v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{R_M}{R}} \ .$$

I følge denne utledningen av unnslipningshastigheten v_e avhenger den ikke av bevegelsesretningen.

Mens massen m holdes i ro ved radius $r = R + h$, så har den energi

$$E = -\frac{GMm}{R+h} \ .$$

Idet den treffer overflaten, har den samme energi, og en hastighet v slik at

$$E = -\frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{R} \ .$$

Som gir at

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = 2GM\,\frac{h}{R(R+h)} \approx 2GM\,\frac{h}{R^2} = 2gh \ ,$$

idet tyngdens akselerasjon er $g = GM/R^2$.

Strengt tatt burde vi ta formelen $v^2 = 2gh$ som en *definisjon* på tyngdens akselerasjon g. Da kan vi se på utregningen her som en utledning av formelen $g = GM/R^2$. Hvis nemlig fallhøyden h er så liten at g er konstant, så er mgh det arbeidet som vi må gjøre mot den konstante tyngdekraften mg for å løfte massen m til høyden h, det er den potensielle energien som massen m har før den faller. I fallet omsettes den potensielle energien mgh til kinetisk energi $(1/2)mv^2$.

3b) Når $R \to R_M$, får vi at

$$v = c\,\sqrt{\frac{\frac{R_M}{R} - \frac{R_M}{r_0}}{1 - \frac{R_M}{r_0}}} \to c \ .$$

Dette resultatet kan vanskelig forstås annet enn på følgende måte. En observatør kan være stasjonær ved en radius $R > R_M$, men ikke ved $R = R_M$. Den som er så uheldig å nå inn til Schwarzschild-radien R_M, må bevege seg utover med lyshastigheten for å unngå å falle innover. Et lyssignal ved $R = R_M$, med retning radielt utover, vil akkurat så vidt unngå å falle innover, men kommer heller aldri noe lenger utover. Hvis vi kan tenke oss en observatør som er stasjonær ved $R = R_M$, og altså beveger seg utover med lyshastigheten, så vil alt som passerer ham på vei innover, bevege seg med lyshastigheten i forhold til ham.

Bevegelsesligningene er symmetriske under tidsreversjon, derfor er hastigheten som steinen får når den faller fra r_0 og ned på overflaten, lik den hastigheten som den må ha på overflaten for å nå opp til r_0. Vi finner altså unnslipningshastigheten når vi lar $r_0 \to \infty$ i ligning (5) i oppgaveteksten, det gir at

$$v_e = c\,\sqrt{\frac{R_M}{R}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \ .$$

Denne generell-relativistiske formelen er identisk med den ikke-relativistiske. Men husk at radien R her ikke er den fysiske avstanden inn til sentrum av planeten, som i det ikke-relativistiske tilfellet, her er R definert ved at vi overtar en annen ikke-relativistisk relasjon, nemlig at arealet av planetoverflaten er $4\pi R^2$.

Her regner vi ut unnslipningshastigheten loddrett oppover. Faktisk er unnslipningshastigheten uavhengig av retningen, men det sier denne utledningen ikke noe om.

3c) Vi omskriver ligning (5) i oppgaveteksten litt, og bruker at $r_0 - R_M \approx R - R_M$,

$$v = c\sqrt{\frac{R_M(r_0 - R)}{R(r_0 - R_M)}} \approx c\sqrt{\frac{R_M(r_0 - R)}{R(R - R_M)}} = \sqrt{\frac{2GM(r_0 - R)}{R(R - R_M)}}$$

Når vi setter inn

$$r_0 - R = h\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}\ ,$$

så får vi at

$$v \approx c\,\frac{\sqrt{R_M h}}{R\,\sqrt[4]{1 - \frac{R_M}{R}}}\ . \tag{1}$$

Schwarzschild-radien for Jorda er

$$R_{MJ} = \frac{2 \times 6{,}6743 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}} \times 5{,}974 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(299\,792\,458\ \mathrm{m/s})^2} = 8{,}902\ \mathrm{mm}\ .$$

Schwarzschild-radien for Sola er

$$R_{MS} = \frac{2 \times 6{,}6743 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}} \times 1{,}9891 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(299\,792\,458\ \mathrm{m/s})^2} = 2964{,}2\ \mathrm{m}\ .$$

Med $h = 1$ m, $R_M = 8{,}9$ mm og $R = 6400$ km får vi at

$$v = 1{,}47\ 10^{-8}\,c = 4{,}42\ \mathrm{m/s}\ .$$

Med $h = 1$ m, $R_M = 3{,}0$ km og $R = 7{,}0\ 10^5$ km får vi at

$$v = 7{,}82\ 10^{-8}\,c = 23{,}5\ \mathrm{m/s}\ .$$

Med $h = 1$ m, $R_M = 3{,}0$ km og $R = 6400$ km får vi at

$$v = 8{,}56\ 10^{-6}\,c = 2566\ \mathrm{m/s}\ .$$

Pass tærne! Og enda verre, med $h = 1$ m, $R_M = 3{,}0$ km og $R = 15$ km får vi at

$$v = 3{,}86\ 10^{-3}\,c = 1157\ \mathrm{km/s}\ .$$

3d) Her bruker vi ligning (1) ovenfor, og setter

$$v^2 = 2gh = c^2\,\frac{R_M h}{R^2\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}} = \frac{2GMh}{R^2\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}}\ .$$

Det gir at

$$g = \frac{GM}{R^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_M}{R}}}\ .$$

Vi får altså det ikke-relativistiske uttrykket GM/R^2 multiplisert med en ekstra faktor som gjør at $g \to \infty$ når $R \to R_M$.

Vi skjønner da at gravitasjonskollaps er uunngåelig hvis $R \to R_M$.