Eksamen. SIF4030 – Astrofysikk. 8/5 – 2000
(MNFFY – 250)

Antydet løsning. Oppgave 1.

a) Eratosthenes' metode kunne ikke virke, fordi de to stolpene ville bli parallelle på en flat jordoverflate, og da kunne man ikke få f.eks. skygge et sted og ikke skygge et annet sted. Sola måtte f.eks. stå i senit begge steder (eller like lang skygge begge steder)

b) Ved polar-sirklene ($\pm 66.5°$ fra ekvator) kan man se sammenfallende horisontplan og ekliptikkplan.

c) Forholdet mellom jordas og månens overflate blir

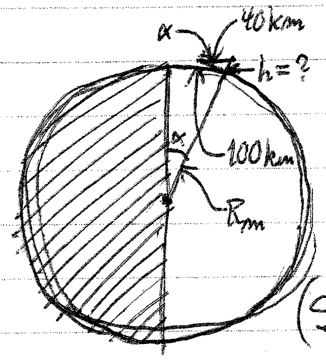
$$(R_j/R_m)^2 = (63\cancel{75}/1738)^2 = \underline{13.\cancel{45}} \text{ (eller } 4^2 = \underline{16})$$

Hvis månen fikk 30000 kratere i løpet av $5 \cdot 10^9$ år skulle jorda ha fått dannet 3 kratere i løpet av

$$X = 3 \cdot 5 \cdot 10^9 / (\overset{(16)}{13.\cancel{45}} \cdot 30000) \text{ år} = \underline{3.7 \cdot 10^4 \text{ år}} \; (\underline{3.1 \cdot 10^4 \text{ år}})$$

siden antall kratere dannet pr. flateenhet og tidsenhet blir

$$3/(x \cdot 4\pi \cdot 637\cancel{5}^2) = 30000/(5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 1738^2).$$

d) 

Fjellets høyde er gitt ved (se fig.)

$$h/40 \approx 100/R_m = 100/1738,$$

dvs. $h = 40 \cdot 100/1738 \text{ km} = \underline{2.3 \text{ km}}$

(Siden α er liten, er $\alpha \approx \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$)

$(\alpha \approx 100/1738 \text{ rad} = 100 \cdot 57.3/1738° \approx 3.3°)$

e) Eksentrisiteten er gitt ved halvaksene i ellipsebanen, eller med maks. og min. for r som er

$$r_{max} = c/(1-\varepsilon), \quad r_{min} = c/(1+\varepsilon),$$

dvs.
$$\varepsilon = (r_{max} - r_{min})/(r_{max} + r_{min})$$
$$= (248-206)/(248+206) = \underline{\underline{0{,}093}}$$

Ditte passer med $\underline{\underline{\text{Mars}}}$, også siden den store halvakse blir

$$a = (r_{max} + r_{min})/2 = 2{,}27 \cdot 10^8\,km = 2{,}27/1{,}496\,AU = \underline{1{,}52}\ AU$$

i planetbanen.

f) For en slik kometbane er $c \approx a$, når eksentrisiteten er veldig stor, dvs. aphel-avstanden er

$$r_{max} \approx 2a, \quad \text{siden } r_{min} = R_\odot \ll r_{max}.$$

Dessuten er perioden gitt ved Keplers 3. lov, dvs.

$$T^2[\text{år}] = a^3[AU]/M[M_\odot], \quad \text{der } M = M_\odot = 1[M_\odot],$$

dvs. for

$$a = 200/2\,AU = 100\,AU: T = \sqrt{a^3} = \sqrt{10^6}\,\text{år} = \underline{\underline{10^3\,\text{år}}}$$
$$a = 200000/2\,AU = 10^5\,AU: T = \sqrt{a^3} = \sqrt{10^{15}}\,\text{år} = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^7\,\text{år}}}$$

g) Romfartøyet må sendes opp i motsatt retning av jordas banebevegelse rundt sola, og med en slik hastighet at det (i stor avstand fra jorda) får en hastighet relativt til jorda som er lik (dvs. må også korrigere for oppskytingsstedets hastighet p.g.a. jordrotasjon), men motsatt rettet jordas banehastighet rundt sola. Da vil romskipet få tilnærmet ren radial hastighet og null tangential hastighet i forhold til sola, og vil falle rett inn mot sola.

Oppgave 2

a) Med flest hydrogen-atomer i grunn-tilstanden burde Lyman-serien være sterkest i sol-spektret, men den ligger i det ultrafiolette området som ikke er synlig fra jord-overflaten. I den synlige delen av spektret får vi Balmer-serien

b) Protuberansen vil stige til

$$150 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km} = \underline{\underline{1.62 \cdot 10^6 \text{ km} = H}}$$

Energi-bevarelse gir oss unnslippingshastigheten, dvs

$$E = T + U = \tfrac{1}{2} m \dot{r}_0^2 - GMm/R = -GMm(R+h),$$

$$\dot{r}_0 = \sqrt{2GM[R^{-1} - (R+h)^{-1}]} = \sqrt{2GMh/R(R+h)}$$

$$(\approx \sqrt{2GMh/R^2} \approx \sqrt{2gh} \text{ for } h \ll R)$$

Unnslippingshastigheten blir da (for $h \to \infty$) regnet fra overflat

$$\dot{r}_0 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} / 7 \cdot 10^8} \text{ m/sek} = \underline{617 \text{ km/s}}$$

men egentlig skal vi regne fra $(R+H)$ til $h \to \infty$, dvs

$$\dot{r}_0 = \sqrt{2GM/(R+H)} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} / 2.32 \cdot 10^9} \text{ m/sek} = \underline{\underline{339 \text{ km/s}}}$$

dvs. $\underline{v < \dot{r}_0}$ og materien (protuberansen) kan ikke unnslipp

c) Tilstandsligningen blir, med konstant tetthet:

$$dP = -\rho g = -(Gm\rho/r^2)dr = -(4\pi r^3 \rho G \rho / 3r^2)dr$$
$$= -(4\pi G \rho^2/3)\, r\, dr,$$

dvs. $$dP/dr = -(4\pi G\rho^2/3)r,$$
$$P = -(2\pi G\rho^2/3)r^2 + \text{konst.}$$

Med grensebetingelsene $P=0$ for $r=R$, gir det
$$P = (2\pi\rho^2 G/3)(R^2-r^2) = (2\pi\rho^2 G/3)R^2[1-(r/R)^2]$$
$$= (\rho G M/2R)[1-(r/R)^2], \text{ når } M = 4\pi R^3\rho/3;$$

dvs. $$P_{max}(r=0) = \rho G M/2R = \frac{1400\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{+30}}{2\cdot 7\cdot 10^{8}}\ \mathrm{N/m^2}$$
$$= \underline{\underline{1.33\cdot 10^{14}\ \mathrm{N/m^2}}} = \underline{\underline{1.33\cdot 10^{9}\ \mathrm{atm.}}}$$

Tilstandsligningen kan utledes slik: Vi betrakter et volum-element i avstand r fra sentrum, med flate dA normalt r. En likevektsbetraktning gir da med Newtons 2. lov i r-retning:
$$(P+dP)dA - PdA = F = Gm(r)dm/r^2,$$
$$dP\cdot dA = -Gm(r)\rho(r)\, dA\cdot dr/r^2,$$
$$\underline{\underline{dP/dr = -\rho G m(r)/r^2}}, \quad \text{der } m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr,$$

som også gjelder for et helt kuleskall, dvs. $dA \to 4\pi r^2$.

d) Tyngdeakselerasjonen er generelt gitt ved
$$g = MG/r^2,$$

der r er avstanden fra stjernens sentrum, dvs.
$$g_s = M_\odot G/R_\odot^2 = \frac{2\cdot 10^{30}\cdot 6.375^2\cdot 10^{6}}{5.98\cdot 10^{24}\cdot 7^2\cdot 10^{16}}\, g_j = \underline{\underline{27.7\, g_j}}$$

for sola, og for stjernene:

$$g_1 = M_\odot G/(0.01R_\odot)^2 = \frac{2\cdot10^{30}\cdot10^4\cdot6.375^2\cdot10^6}{5.98\cdot10^{24}\cdot7^2\cdot10^{10}}\,g_j = \underline{\underline{2.8\cdot10^5 g_j}}$$

$$g_2 = M_\odot G/(1000R_\odot)^2 = \frac{2\cdot10^{30}\cdot6.375^2\cdot10^6}{5.98\cdot10^{24}\cdot10^6\cdot7^2\cdot10^{10}}\,g_j = \underline{\underline{2.8\cdot10^{-5} g_j}}$$

$$g_1/g_2 = 10^5/10^{-5} = \underline{\underline{10^{10}}}$$

e) Absolutt størrelsesklasser blir

$$M = m+5-5\lg d = 0+5-5\cdot2 = \underline{\underline{-5}},$$

$$M = m+5-5\lg d = 17.5+5-5\cdot1.3 = \underline{\underline{+16}}.$$

f) Med trigonometrisk parallaks lik 0.01 buesek $=\alpha$, blir avstanden til stjerna lik

$$d = 1/\alpha = 100 \text{ parsec},$$

dvs. absolutt størrelsesklasse er

$$M = m+5-5\lg d = 15+5-10 = \underline{\underline{10}}.$$

Wiens forskyvningslov gir en fotosfæretemperatur lik

$$T = C/\lambda_{max} = 6000\cdot5000/10000\text{ K} = 3000\text{ K}, \quad T_\odot/T = 2,$$

og når luminositeten er gitt ved

$$M - M_\odot = 2.5\lg(L_\odot/L),$$

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4 = L_\odot/100 = 4\pi R_\odot^2\sigma T_\odot^4/100,$$

får vi $R = (T_\odot/T)^2 R_\odot/\sqrt{100} = \underline{\underline{0.4\,R_\odot}} = \underline{\underline{2.8\cdot10^5\text{ km}}}.$

g) Materien i stjernetåken må være <u>interstellart støv</u>, dvs. stjernetåken er en "<u>refleksjonståke</u>". (Gass i vanlig forstand ville produsere emisjonslinjer, men her får vi bare absorpsjon eller refleksjon. Dessuten er O-stjernen så varm, at de fleste atomer er ionisert i fotosfæ

Oppgave 3

a) Med jordas banehastighet lik v_j, blir stjernens radialhastighet i forhold til sola gitt ved

$$\left.\begin{array}{l} V_s - V_j = -48 \text{ km/sek} \\ V_s + V_j = +12 \text{ km/sek} \end{array}\right\} \underline{V_s = -18 \text{ km/sek}} \text{ (mot sola)},$$

dvs. jordas banehastighet er lik

$$V_j = 12 + 18 \text{ km/sek} = \underline{\underline{30 \text{ km/sek}}}$$

På et år tilbakelegger jorda da

$$T \cdot V_j = 2\pi a,$$

dvs.

$$a = T \cdot V_j / 2\pi = \frac{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 30}{2\pi} \text{ km} = \underline{\underline{1.5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1 A}}$$

b) Tyngdepunktets posisjon finnes ved "moment-satsen":

$$M_1 R_1 = M_2 R_2, \qquad 3M_\odot R_1 = 1M_\odot (4 - R_1),$$

$$4M_\odot R_1 = 4M_\odot, \qquad \underline{\underline{R_1 = 1 AU}}.$$

Keplers 3. lov gir oss perioden T, dvs. med dimensjoner [AU], [år] og [$M_\odot$], får vi

$$(M_1 + M_2) T^2 = a^3;$$

$$T^2 = a^3 / (M_1 + M_2) = 4^3/4 = 16, \qquad \underline{\underline{T = 4 \text{ år}}}$$

c) Observert radial-hastighet v_r er radial-komponenten til romhastigheten som blir

$$v = v_r / \sin\beta, \qquad (v_r = v \sin\beta)$$

når β er vinkelen mellom baneplanet og planet normalt vår synsretning. Relativ-avstanden mellom stjernene er da gitt ved (i relativ-koordinater)

$$a = vT/2\pi = \frac{v_r \cdot T}{2\pi \sin\beta} = \frac{60 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 3600}{2\pi \cdot 0.5}\ \text{km}$$

$$= 36\,252\,000\ \text{km} = \frac{36\,252\,000}{149\,600\,000}\ \text{AU} = \underline{0.2423\ \text{AU}},$$

perioden er

$$T = 22\ \text{døgn} = 22/365.25\ \text{år} = \underline{0.0602\ \text{år}},$$

og total masse blir

$$M = M_1 + M_2 = a^3/T^2 = (0.2423^3/0.0602^2)M_\odot = \underline{\underline{3.9 M_\odot}}$$

d) Ifølge Keplers 3. lov gjelder $MP^2 = a^3$, når M er Melkeveiens masse i $[M_\odot]$, P er perioden i [år], og a er solas baneradius i [AU], dvs.

$$a = 2.063 \cdot 10^5 \cdot 10^4\ \text{AU} = 2.063 \cdot 10^9\ \text{AU}, \qquad P = 10^8\ \text{år},$$

$$M = (2.063 \cdot 10^9)^3/(10^8)^2\ M_\odot = \underline{8.8 \cdot 10^{11}\ M_\odot}$$

e) 51 stjerner innenfor en radius lik 5 parsec gir en stjernetetthet lik

$$51 \cdot 3/(4\pi \cdot 5^3)\ \text{parsec}^{-3} = 0.097\ \text{stjerner/parsec}^3,$$

som tilsvarer en midlere masse-tetthet lik

$$\rho = \frac{0.097 \cdot 0.4 \cdot 2 \cdot 10^{33}}{(2.06265 \cdot 10^5 \cdot 1.496 \cdot 10^{13})^3}\ \text{g/cm}^3 = \underline{\underline{2.64 \cdot 10^{-24}\ \text{g/cm}^3}}$$

f) Tettheten i kulehopen blir:

$10^5 \cdot 3/(4\pi \cdot 25^3)$ stjerner/parsec^3 = $\underline{\underline{1{,}53}}$ stjerner/parsec^3

Tettheten i den åpne stjernehopen blir

$100 \cdot 3/(4\pi \cdot 20^3)$ stjerner/parsec^3 = $\underline{\underline{0{,}003}}$ stjerner/parsec^3

Vi ser at stjerne-tettheten under e) ligger i imellom de to ovenfor, dvs.

$$\underline{\underline{1.53 > 0.097 > 0.003 \text{ stjerner/parsec}^3}}$$

g) Ifølge Gauss' lov vil bare massen innenfor r gi netto kraft på m, dvs.

$$M(r) = (4\pi/3)\rho r^3.$$

Galaksens energi (som bevares under ekspansjonen):

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM(r)}{r} = \tfrac{1}{2}mv^2 - (4\pi/3)Gm\rho r^2.$$

Siden $T \geq 0$, blir $V(r) \leq E$, og $r = \infty$ tilsvarer $V = 0$. Skal galaksen nå $r = \infty$, må derfor $E \geq 0$. Kritisk grense-tilfelle blir da $\underline{E = 0}$, dvs tilsvarende $\rho = \rho_c$, og

$$E = 0 = m[(v^2/2) - (4\pi/3)Gr^2\rho_c]$$

dvs.

$$\rho_c = (3/8\pi)(v^2/Gr^2) = \underline{\underline{3H^2/(8\pi G)}},$$

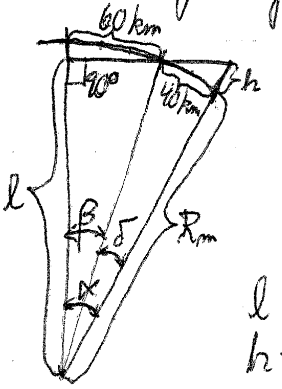
siden $v = Hr$ ifølge Hubbles lov.

P.S. Tilleggskommentarer til eksamen SIF4030, 8/5-2000

1c] Både
$$(R_j/R_m)^2 = (6375/1738)^2 = 13.45$$
og
$$(R_j/R_m)^2 = 4^2 = 16 \text{ (oppgitt)}$$
godtas som riktig svar, dvs.
$$\underline{X = 3.7 \cdot 10^4 \text{ år}}, \quad \text{eller} \quad \underline{X = 3.1 \cdot 10^4 \text{ år}}$$

1d] En approksimativ løsning (for små vinkler) blir
$$h/40 \approx 100/R_m = 100/1738,$$
$$h \approx 40 \cdot 100/1738 \text{ km} \approx \underline{2.3 \text{ km}},$$

som er OK som riktig svar. Hvis man vil regne mer nøyaktig, blir løsningen følgende (se fig.):



$$100/2\pi R_m = \alpha^{(o)}/360°, \text{ dvs.}$$
$$\alpha = 100 \cdot 360/(2\pi \cdot 1738) = \underline{3.30°},$$
$$\beta = (60/100)\alpha = (3/5) \cdot 3.3° = \underline{1.98°},$$
og
$$l = (R_m + h)\cos\alpha = R_m \cos\beta, \text{ dvs.}$$
$$h = R_m(\cos\beta - \cos\alpha)/\cos\alpha =$$
$$= 1738(0.9994 - 0.9983)/0.9983 \text{ km} \approx \underline{1.9 \text{ km}}$$

1g] Uansett hvordan romskipet skytes opp, er en "kompensasjon" for jordas banehastighet klart det viktigste. Andre ting spiller mindre rolle, men romskipet må selvfølgelig kunne forlate jordas grav.-felt.

2a] Spørsmålet her kan kanskje være "tvetydig" eller "uklart" (ufullstendig) formulert. Balmer-serien er sterkest i det synlige spektret (fra jordoverflaten), mens Lyman-serien som egentlig er sterkest, er usynlig fra jordoverflaten. Både Lyman-serien og Balmer-serien godtas derfor som svar (hvis det ikke er andre feil i svaret).

2b] Siden spørsmålet inneholder en "sammenblanding" av konstant hastighet og unnslippingshastighet (som forutsetter minkende kinetisk energi og hastighet ved "klatring" i gravitasjonsfeltet) godtas både fotosfæren og protuberansens posisjon etter 3 timer som utgangspunkt for beregning av unnslippingshastigheten, selv om bare det siste egentlig er det riktige. Men begge deler gir samme konklusjon, og tall-verdien for unnslippings-hastigheten blir ikke "etterlyst" i spørsmålet...

2g] Det viktigste svaret her er at materien i stjernetåke kan ikke være (en gass av) frie atomer eller molekyler, men må bestå av større partikler (støv).

3b] Oppgaven kan løses på to måter; enten direkte med relativ-avstand og Keplers 3. lov, eller ved å se på bare en stjernes bevegelse om felles tyngdepunkt. Det gir samme sva

3c] Her mangler data for hver enkelt-stjerne, så man må egentlig bruke relativ-koordinater og Keplers 3. lov. En analyse for bare en stjerne som i 3b] kan brukes hvis man f.eks. antar to stjerner med samme masse (og tilsv. resultat for total mass