Antydet løsning. Oppgave 1

a) Gravitasjonskraften er

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -(GMm/r^2)\,\hat{\mathbf{e}}_r,$$

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -GMm/r^2,$$

dvs. potensialet blir

$$U = -\int F_r\,dr = GMm\int r^{-2}\,dr = -(GMm/r) + \text{konstant}$$

Velger vi som grensebetingelse

$$U = 0 \text{ for } r \to \infty,$$

får vi

$$U = -GMm/r = \underline{\underline{-GMm/(R+h)}}$$

Med tallverdier innsatt:

$$U = -6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 100/(6.47\cdot 10^{3}\cdot 10^{3})\ \text{Nm} = \underline{\underline{-6.2\cdot 10^{9}\ \text{Joule.}}}$$

b) Energibevarelse gir oss radialhastigheten, dvs.

$$E = T + U = \tfrac{1}{2}m\dot{r}_0^{2} - GMm/R = -GMm/(R+h)$$

$$\dot{r}_0 = \sqrt{2GM\left(\tfrac{1}{R} - \tfrac{1}{R+h}\right)} = \underline{\underline{\sqrt{2GMh/R(R+h)}}} \approx \underline{\underline{\sqrt{2GMh}/R = \sqrt{2gh}}}$$

Med tallverdier innsatt:

$$\dot{r}_0 = \sqrt{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 10^{5}/6.37\cdot 6.47\cdot 10^{12}}\ \text{m/sek} = \underline{\underline{1.4\ \text{km/sek}}}$$

Unnstippingshastigheten blir (for $h \to \infty$):

$$\underline{\underline{\dot{r}_0 = \sqrt{2GM/R}}} = \sqrt{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}/6.37\cdot 10^{6}}\ \text{m/sek} = \underline{\underline{11.2\ \text{km/sek}}}$$

c) I sirkelbevegelsen må sentripetalkraften være lik gravitasjonskraften (eller sentrifugalkraften må balansere gravitasjonskraften). Banehastigheten er da gitt ved

$$\theta = \omega t,$$

$$v = \omega r,$$

$$mv^2/r = m\omega^2 r = GMm/r^2,$$

$$v = \sqrt{GM/r} = \sqrt{GM/(R+h)} \approx \underline{\underline{\sqrt{GM/R} = \sqrt{gR}}}$$

Med tallverdier innsatt:

$$v = \sqrt{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}/6.47\cdot 10^{6}}\ \text{m/sek} = \underline{\underline{7.9\ \text{km/sek}}}$$

d) Omløpstiden regnet fra et fast punkt på jordoverflaten er bestemt ved satelittens omløpsfrekvens og jordens egenrotasjon, dvs. (med satelittbevegelse østover i samme retning som jordrotasjonen) får vi

$$\omega = v/r,$$
$$\omega_j = 2\pi/T_j,$$
$$\omega T = 2\pi + \omega_j T,$$
$$T = 2\pi/[(v/r) - (2\pi/T_j)] = \left(\frac{v}{2\pi(R+h)} - \frac{1}{T_j}\right)^{-1},$$

der ω_j og T_j refererer til jordens egenrotasjon. Med tallverdier innsatt:

$$T_j \approx 24\cdot 60\cdot 60 \text{ sek} = 86400 \text{ sek},$$
$$T = [(7.9/2\pi\cdot 6.47\cdot 10^3) - (1/86400)]^{-1} \text{ sek}$$
$$= (0.000194 - 0.000012)^{-1} \text{ sek} = 5500 \text{ sek} = \underline{\underline{1 \text{ t. } 32 \text{ min.}}}$$

e) En stasjonær satelitt tilsvarer $T \to \infty$, eller

$$\omega = v/r = \omega_j = 2\pi/T_j$$
$$v = \sqrt{GM/(R+h)} = 2\pi(R+h)/T_j$$
$$\underline{\underline{h = (\sqrt{GM}\,T_j/2\pi)^{2/3} - R}},$$

dvs.

$$h = \left[(\sqrt{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}\cdot 8.64\cdot 10^4/2\pi)^{2/3} - 6.37\cdot 10^6\right] m$$
$$= (4.23\cdot 10^7 - 6.4\cdot 10^6) m = 3.6\cdot 10^7 m = \underline{\underline{3.6\cdot 10^4 \text{ km}}},$$

eller banehastigheten blir

$$v = \sqrt{GM/(R+h)} = \sqrt{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}/4.23\cdot 10^7} \text{ m/sek} = \underline{\underline{3.1 \text{ km/sek}}},$$

som også kan finnes slik:

$$v = \omega r = 2\pi(R+h)/T_j = 2\pi\cdot 4.23\cdot 10^7/86400 \text{ m/sek} = \underline{\underline{3.1 \text{ km/sek}}}$$

f) Keplers 1. lov sier at planetbanene er ellipser med solen i et brennpunkt. Keplers 2. lov sier at flatehastigheten er konstant, dvs. at flaten som radiusvektor overstryker pr. tidsenhet er konstant. Keplers tredje lov sier at omløpstiden T er proporsjonal med $a^{3/2}$, der a er planetbanens (ellipsens) store halvakse.

Antydet løsning. Oppgave 2

a) Når månen (sett fra jorden) kommer foran solen og „dekker for" får vi en solformørkelse, dvs. solen er „formørket" for en observatør (på jorden) i måneskyggen. Tilsvarende får vi måneformørkelse når månen passerer gjennom jordskyggen. Innenfor et område kalt umbra får vi fullstendig (total) formørkelse og innenfor et område kalt penumbra får vi delvis formørkelse. Måneformørkelse kan vi bare få ved fullmåne (når månen er fullstendig opplyst av solen sett fra jorden), og solformørkelse kan vi bare få ved nymåne (når månen befinner seg mellom jorden og solen slik at vi ser skyggesiden).

b) Overflatetemperaturene er ca. −150°C for Saturn, ca. −180°C for Uranus, og ca. −210°C for Neptun (sannsynligvis). I atmosfæren finnes sannsynligvis bare metan, hydrogen og helium, siden andre stoffer eventuelt må være „frosset ut" på grunn av den lave temperaturen i atmosfæren.

c) Tyngdeakselerasjonen er generelt gitt ved

$$g \propto M/r^2,$$

der r er avstanden fra planetens sentrum. For Saturn og Uranus er masse og radius gitt ved

$$M_S = 95.2\ M_j,$$
$$R_S = 59500\ \text{km} = 9.34 R_j,$$
$$M_U = 14.6\ M_j,$$
$$R_U = 23600\ \text{km} = 3.70 R_j,$$

dvs.

$$g_S = 95.2\ M_j G/(9.34 R_j)^2 = \underline{\underline{1.09\, g_j}}$$
$$g_U = 14.6\ M_j G/(3.70 R_j)^2 = \underline{\underline{1.07\, g_j}}$$

d) Wiens forskyvningslov gir direkte

$$T = C/\lambda_{max} = 2.90 \cdot 10^6 / 700 \text{ K} = \underline{4140 \text{ K}},$$

for stjernens overflatetemperatur. Da blir utstrålt energi pr. m^2 og sek ifølge Stefan–Boltzmanns lov lik

$$E = aT^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4140^4 \text{ J} = \underline{1.7 \cdot 10^7 \text{ Joule}}$$

e) Hvis en lyskilde (dvs. stjernen) beveger seg bort fra observatøren (jorda), vil han observere en lavere frekvens (større bølgelengde), og Doppler-forskyvningen blir (regnet relativistisk)

$$\omega/\omega' = \lambda'/\lambda = \sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)},$$

$$(1+v/c)(\lambda'/\lambda)^2 = (1-v/c),$$

dvs.

$$v = c\left[1-(\lambda'/\lambda)^2\right]/\left[1+(\lambda'/\lambda)^2\right]$$

$$= (5001^2 - 5000^2)\cdot 3 \cdot 10^8/(5001^2+5000^2) \text{ m/sek}$$

$$= 10001 \cdot 3 \cdot 10^8 / 5001001 \text{ m/sek} = \underline{60 \text{ km/sek}} \; (= c(\Delta\lambda/\lambda))$$

f) Sola har ingen fast overflate. Tetthet og temperatur øker kontinuerlig innover mot solas sentrum, uten noen skarp forandring ved en „overflate", men i en bestemt avstand fra sentrum blir solas gasser „ugjennomsiktige". Denne sonen er kanskje bare 200 km (tykk) og kalles fotosfæren. Lys fra den ytre del av fotosfæren når fram til jorda, mens lys fra området innenfor fotosfæren blir absorbert (og reemittert) p.g.a. dannelse av store mengder negative hydrogen-ioner som absorberer nesten alt lys i den synlige del av lysspektret. Siden fotosfæren hindrer oss i å se lenger inn i sola, kan den defineres som solas „overflate". Solas overflatetemperatur kan bestemmes på tre måter v.h.a. strålingslovene: Stefan–Boltzmanns lov, Wiens forskyvningslov, og Plancks strålingslov. Alle tre metodene gir ca. 5800 K som er en „effektiv temperatur", da fotosfærens ytterste lag har ca. 4500 K, mens temperaturen innerst er ca. 7000 K. Fotosfæren har et „kornet" utseende (granulasjon).

d) Wiens forskyvningslov gir direkte

$$T = C/\lambda_{max} = 2.90 \cdot 10^6/700\ K = \underline{4140\ K},$$

for stjernens overflatetemperatur. Da blir utstrålt energi pr. m^2 og sek ifølge Stefan-Boltzmanns lov lik

$$E = aT^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4140^4\ J = \underline{1.7 \cdot 10^7\ Joule}$$

e) Hvis en lyskilde (dvs. stjernen) beveger seg bort fra observatøren (jorda), vil han observere en lavere frekvens (større bølgelengde), og Doppler-forskyvningen blir (regnet relativistisk)

$$\omega/\omega' = \lambda'/\lambda = \sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)},$$

$$(1+v/c)(\lambda'/\lambda)^2 = (1-v/c),$$

dvs.

$$v = c[1-(\lambda'/\lambda)^2]/[1+(\lambda'/\lambda)^2]$$

$$= (5001^2 - 5000^2) \cdot 3 \cdot 10^8/(5001^2 + 5000^2)\ m/sek$$

$$= 10001 \cdot 3 \cdot 10^8/5001001\ m/sek = \underline{60\ km/sek}\ (= c(\Delta\lambda/\lambda))$$

f) Sola har ingen fast overflate. Tetthet og temperatur øker kontinuerlig innover mot solas sentrum, uten noen skarp forandring ved en „overflate", men i en bestemt avstand fra sentrum blir solas gasser „ugjennomsiktige". Denne sonen er kanskje bare 200 km (tykk) og kalles fotosfæren. Lys fra den ytre del av fotosfæren når fram til jorda, mens lys fra området innenfor fotosfæren blir absorbert (og reemittert) p.g.a. dannelse av store mengder negative hydrogen-ioner som absorberer nesten alt lys i den synlige del av lysspektret. Siden fotosfæren hindrer oss i å se lenger inn i sola, kan den defineres som solas „overflate". Solas overflatetemperatur kan bestemmes på tre måter v.h.a. strålingslovene: Stefan-Boltzmanns lov, Wiens forskyvningslov, og Plancks strålingslov. Alle tre metodene gir ca. 5800 K som er en „effektiv temperatur", da fotosfærens ytterste lag har ca. 4500 K, mens temperaturen innerst er ca. 7000 K. Fotosfæren har et „kornet" utseende (granulasjon).

Eksamen. FY251. 11/5–2000

P.S. Tilleggs-kommentar til oppgave 2b:

Overflatetemperaturene til Saturn, Uranus og Neptun kan beregnes tilnærmet hvis man antar

1). Planetene er i strålings-likevekt med omgivelsene (inkludert sola)
2). Strålingsintensitet er gitt ved Stefan-Boltzmanns lov.
3) Lysstyrken avtar kvadratisk med avstanden. (fra sola).
4) Jordas overflate-temperatur er ca. 300 K (i avstand 1 AU fra sola) ved strålingslikevekt.

Det gir følgende temperaturer (ved skalering av avstand fra sola):

Saturn: $T = \sqrt[4]{1/9.54^2} \cdot 300\,\mathrm{K} = \underline{97\,\mathrm{K}} \approx \underline{\underline{-170^\circ\mathrm{C}}}$

Uranus: $T = \sqrt[4]{1/19.19^2} \cdot 300\,\mathrm{K} = \underline{68\,\mathrm{K}} \approx \underline{\underline{-200^\circ\mathrm{C}}}$

Neptun: $T = \sqrt[4]{1/30.06^2} \cdot 300\,\mathrm{K} = \underline{55\,\mathrm{K}} \approx \underline{\underline{-220^\circ\mathrm{C}}}$

(drivhuseffekt)
"Atmosfæriske effekter" + Kelvin-Helmholtz-effekten osv. vil gi litt høyere overflate-temperaturer ---

Følgende svar vil derfor godtas:

Saturn: $\underline{\underline{(-150)-(-170)^\circ\mathrm{C}}}$

Uranus: $\underline{\underline{(-180)-(-200)^\circ\mathrm{C}}}$

Neptun: $\underline{\underline{(-200)-(-220)^\circ\mathrm{C}}}$

Antydet løsning. Oppgave 3

a) Ifølge definisjonen er forholdet gitt ved
$m_1 - m_2 = 2.5 \lg (I_2/I_1)$,
$\lg (I_2/I_1) = (m_1 - m_2)/2.5 = (23.9 + 1.4)/2.5 = 10.12$,
$I_2/I_1 = \underline{1.32 \cdot 10^{10}}$. (eller: $\underline{I_2/I_1} = \sqrt[5]{100}^{(m_1 - m_2)}$, pr. def.)

b) Definisjonen gir oss at forskjellen
$m - M = 8$
i størrelse tilsvarer
$I/I_0 = 1/1600 = (10/d)^2$, $(I_0/I = 2.512^8 = 1585)$
$d = 10 \cdot 40$ parsec $= \underline{\underline{400 \text{ parsec}}}$,
eller vi får tilsvarende
$M - m = 2.5 \lg (I/I_0) = 5 \lg (10/d) = 5 - 5 \lg d$,
$5 \lg d = 5 - M + m = 5 - 0 + 8 = 13$,
$\lg d = 2.6$,
$\underline{\underline{d = 400 \text{ parsec.}}}$

c) Den observerte radialhastigheten v_r er radialkomponenten til den totale relativhastigheten (romhastigheten) som blir
$v = v_r / \sin \beta$,
når β er vinkelen mellom baneplanet og planet normalt vår synsretning. Relativavstanden mellom stjernene er da gitt ved
$a = vT/(2\pi) = v_r T/(2\pi \sin \beta)$
$= 60 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 3600 / (2\pi \cdot 0.5)$ km $= 36\,302\,600$ km
$= 36\,302\,600 / 149\,600\,000$ AU $= 0.2427$ AU,
perioden er
$T = 22$ døgn $= 22/365$ år $= 0.0603$ år,
og total masse blir
$M = M_1 + M_2 = a^3/T^2 = (0.2427^3/0.0603^2) M_\odot = \underline{3.9 M_\odot}$

d) Planetariske tåker er runde eller ringformete ('uteformete) tåker av fluorescerende gass som omgir en meget varm sentralstjerne med en temperatur på kanskje opptil 30000K. Tåken ekspanderer „sakte" med en hastighet på 20-50 km/sek og representerer sannsynligvis et meget sent stadium i en stjernes (som blir hvit dverg) utvikling og liv. Planetariske tåker synes å være stjerner som gradvis frigir store masser (gass-mengder) uten å eksplodere, dvs. (ikke altfor massive) stjerner kan miste masse på denne måten uten å gjennomgå en supernova. Strålingstrykk eller turbulent bevegelse i stjernens indre presser de ytre lagene utover i rommet, og den „utsendte" gassen vil gløde ved fluorescens på grunn av den intense utstrålingen fra „moderstjernen". Sentralstjernen blir til en hvit dverg.

e) Rødforskyvningen gir en hastighet bestemt ved

$$z = \Delta\lambda/\lambda = \sqrt{(1+v/c)/(1-v/c)} - 1 = 0.158,$$

$$\sqrt{(1+v/c)/(1-v/c)} = 1.158,$$

$$(1+v/c)/(1-v/c) = 1.34,$$

$$2.34\,(v/c) = 0.34,$$

$$\underline{v/c = 0.145} \qquad (c = 3\cdot 10^5\ \text{km/sek})$$

$$\underline{v = 43500\ \text{km/sek}}$$

Med en Hubbles konstant lik

$$H_0 = 70\ \text{km/sek}\cdot\text{Mparsec},$$

gir det en avstand lik

$$r = v/H_0 = 0.145c/H_0 = 0.145\cdot 3\cdot 10^5/70\ \text{Mparsec}$$

$$= \underline{620\ \text{Mparsec}}$$

f) Universets maksimale alder blir da

$$t_H = H^{-1} = 10^6\cdot 3.26\cdot 3\cdot 10^5/75\ \text{år} = \underline{1.3\cdot 10^{10}\ \text{år}},$$

siden lyshastigheten er (og vi bruker lysår for å finne Mparsec)

$$c = 3\cdot 10^5\ \text{km/sek}$$