Eksamen i Astrofysikk, fag MNFFY 250
Tirsdag 3. juni 2003
Løsninger

1a) Et Hertzsprung–Russell-diagram klassifiserer stjerner. Hver stjerne markeres med et punkt i et todimensjonalt diagram. Horisontalaksen i diagrammet viser spektralklassen, fra venstre mot høyre: O, B, A, F, G, K, M, det er ekvivalent med å vise overflatetemperaturen økende fra høyre mot venstre. Vertikalaksen viser den absolutte størrelsesklassen, økende nedover, det samme som luminositeten i logaritmisk skala, økende oppover.
Hovedserien, der flertallet av stjerner er å finne i diagrammet, er et smalt bånd fra øvre venstre mot nedre høyre hjørne. Kjempestjerner finnes øverst i diagrammet, fordi de har stor luminositet. Røde kjempestjerner har lav overflatetemperatur og havner derfor på høyre side, mens blå kjempestjerner har høy overflatetemperatur og havner på venstre side. Superkjemper har enda høyere luminositet enn kjempene, så de havner aller øverst i diagrammet. Hvite dvergstjerner danner et bånd langt nedenfor hovedserien.
Nøytronstjerner havner helst utenfor diagrammet nederst til venstre, fordi de har ekstra lav luminositet (i det optiske spektralområdet, som er det som tegnes i HR-diagrammet), og fordi de har høy overflatetemperatur.

1b) Hovedseriestjernene er alle i den fasen der hydrogen omdannes til helium i sentrum av stjernen.
At de danner et smalt bånd i HR-diagrammet, viser at luminositet, overflatetemperatur og alle andre egenskaper til en hovedseriestjerne stort sett er bestemt av en eneste parameter. Den parameteren er massen: stjernene i hovedserien sprer seg i et bånd fordi de har forskjellig masse. Båndet har en viss bredde, fordi de størrelsene som observeres, nemlig luminositet og overflatetemperatur, har en viss måleusikkerhet, men også fordi stjernene faktisk er forskjellige, i alder, kjemisk sammensetning, og så videre.

1c) Jo mer massiv en stjerne er, jo kortere levetid har den. Mer kvantitativt: teori og observasjoner viser at for hovedseriestjerner gjelder en relasjon mellom luminositeten L og massen M av formen

$$L = \text{konstant } M^{3,5} \ .$$

Levetiden t til en stjerne er stort sett det samme som den tiden den befinner seg på hovedserien, som er stort sett proporsjonal med massen (hvor mye brennstoff den har) og omvendt proporsjonal med luminositeten (hvor fort den forbruker brennstoffet). Altså:

$$t = \text{konstant } \frac{M}{L} = \text{konstant } \frac{M}{M^{3,5}} = \text{konstant } M^{-2,5} \ .$$

Hovedseriestjernene øverst til venstre i HR-diagrammet har størst masse og kortest levetid, de nederst til høyre har minst masse og lengst levetid.
I en stjernehop har de fleste stjernene noenlunde samme alder. Dessuten har de noenlunde samme avstand til oss, slik at tilsynelatende lysstyrke (engelsk: brightness) og luminositet (absolutt lysstyrke) er proporsjonale, og vel å merke, proporsjonalitetskonstanten er den samme for dem alle. Når vi tegner et HR-diagram for en stjernehop, spiller det derfor liten rolle om vi bruker absolutt eller tilsynelatende lysstyrke (størrelsesklasse).
De fleste stjernehopene er så gamle at de mest massive stjernene, med kortest levetid, har forlatt hovedserien, og da beveger de seg først oppover mot høyre i diagrammet.

Derfor vil hovedserien for en stjernehop starte som normalt nede i høyre hjørne, men når vi følger den oppover mot venstre, kommer vi til et punkt der alle stjernene omtrent samtidig er i ferd med å forlate hovedserien og bevege seg oppover mot høyre. Alderen til de stjernene som befinner seg nettopp i det punktet der hovedserien bryter av og snur oppover i diagrammet, er da alderen til stjernehopen. Denne alderen må beregnes teoretisk: massen og luminositeten til stjernene kan observeres, men bare de teoretiske stjernemodellene kan fortelle hvor stor andel av alt hydrogenet i en stjerne som omdannes til helium mens den er på hovedserien.

2a) Fotosfæren er innerst av de tre lagene, utenfor den har vi kromosfæren, og ytterst koronaen.
Fotosfæren er det vi ser som overflaten av Sola. Den er synlig fordi den er relativt lite gjennomsiktig, selv om den består av svært tynn gass, tettheten er bare 10^{-4} av tettheten til luft ved havoverflaten. Vi kan se ca. 400 km innover i fotosfæren. Ugjennomsiktigheten skyldes at det finnes negative ioner av hydrogen, som har lav ioniseringsenergi og derfor lett absorberer fotoner. Et bilde av fotosfæren med høy oppløsning viser granulasjon, som skyldes konveksjon, hver konveksjonscelle måler typisk 1000 km i diameter. Konveksjonen drives av at temperaturen avtar utover: fra 5800 K nederst til 4400 K øverst i fotosfæren.
Kromosfæren er enda en faktor 10^{-4} tynnere enn fotosfæren, og den er gjennomsiktig. Men den sender ut lys med et linjespektrum. Den linjen som dominerer i synlig lys er hydrogenlinjen H_α, som gir kromosfæren rød farge. Et fotografi av kromosfæren ved solranden (tatt f.eks. under en solformørkelse) viser at yttergrensen av kromosfæren er svært "hårete". Tykkelsen er et par tusen kilometer, men yttergrensen er altså ikke særlig skarpt definert. Temperaturen øker til 25 000 K øverst i kromosfæren.
Koronaen strekker seg millioner av kilometer utover i rommet. Den lyser omtrent like mye tilsammen som fullmånen. Lyset fra den inneholder ganske eksotiske spektrallinjer, det skyldes at gassen der er uhyre tynn, og dessuten at temperaturen er så høy som 10^6 K.

2b) Solflekker er områder i fotosfæren som ser mørkere ut enn omgivelsene, fordi temperaturen er lavere, typisk 4300 K mot 5800 K. En solflekk kan ha en levetid på et par måneder. Antallet flekker varierer i en syklus på 11 år. En syklus starter med solflekker langt mot nord og langt mot sør på Sola, og i løpet av syklusen opptrer flekkene stadig nærmere ekvator. De opptrer gjerne parvis, der den ene "går foran" i den retningen de beveger seg når Sola roterer. De to flekkene i et par har magnetfelt med motsatt polaritet. Den ledende flekken i et par har samme polaritet for alle flekkene på den nordlige halvkulen, mens polariteten i den ledende flekken er motsatt på den sørlige halvkulen. Dessuten er polariteten av magnetfeltet motsatt i to påfølgende elleve års solflekksykluser.
Solvind er så å si fortsetningen av koronaen, den er en strøm av partikler fra Sola, mest protoner og elektroner, som beveger seg utover med hastigheter på noen hundre kilometer i sekundet.
Magnetfelt på Sola kan måles ved hjelp av Zeeman-effekten, som består i at mange spektrallinjer fra atomer i magnetfelt splittes i to eller flere linjer. Splittingen er (oftest, men ikke alltid) proporsjonal med styrken av magnetfeltet.
Når en spektrallinje splittes i flere ved Zeeman-effekten, er det også mulig å måle ret-

ningen av magnetfeltet ved å måle den sirkulære polarisasjonen av lyset i de enkelte linjene (dette er noe som ikke hører med til pensum).

2c) Spektret fra fotosfæren er kontinuerlig fordi den er ugjennomsiktig for alle bølgelengder. Kromosfæren, derimot, er gjennomsiktig ved de fleste bølgelengdene, bare ikke for de bølgelengdene som svarer til de viktigste spektrallinjene. Det viser at fotosfæren har større tetthet enn kromosfæren. Det viser også at kromosfæren har høyere temperatur enn fotosfæren, ellers ville vi ha sett absorpsjonslinjer og ikke emisjonslinjer.
Det at spektret fra fotosfæren inneholder absorpsjonslinjer, viser at temperaturen i de øverste lagene er lavere enn i de nederste lagene.

2d) Nettoresultatet av alle reaksjonene tilsammen er at fire protoner og to elektroner omdannes til en heliumkjerne (med to protoner og to nøytroner) og to elektronnøytrinoer. Vi tar ikke fotonene med i regnskapet, fordi de sendes ut og absorberes hele tiden.

2e) Fusjon av to ladde atomkjerner, i dette tilfellet to protoner, er avhengig av at de to kjernene kan komme nær nok hverandre, dvs. inn til en avstand av rundt 1 fm $= 10^{-15}$ meter (fm betyr femtometer, eller fermi). Det betyr at de må ha høy nok kinetisk energi til å overvinne den elektrostatiske frastøtningen mellom dem, også kalt Coulomb-barrieren, og det betyr igjen at temperaturen må være høy. Kvantemekanisk tunnellering gjør at partiklene kan komme gjennom Coulomb-barrieren uten at de har nok energi til å "klatre over den". Det hjelper til å redusere den kritiske temperaturen for fusjonsreaksjoner.
For at Sola skal være i hydrostatisk likevekt, må trykket øke innover mot sentrum. I Sola gjelder med god tilnærming den ideelle gassloven

$$P = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}} ,$$

der P er trykket, ρ er massetettheten (masse pr. volum), k_B er Boltzmanns konstant, T er temperaturen og $\overline{m}$ er gjennomsnittsmassen av partiklene. Trykket øker innover i Sola både fordi tettheten ρ øker og fordi temperaturen T øker. Derfor er det naturlig at temperaturen er høyest i sentrum.
Men det er ikke nødvendigvis slik at høyt trykk forutsetter høy temperatur! Det kunne f.eks. tenkes, rent prinsipielt, at temperaturen var konstant, og likevel kunne trykket øke innover proporsjonalt med en økende tetthet. Når stjernen dannes, er det slik at gassen varmes opp samtidig som den trykkes sammen, men etter noen millioner år har denne tidlige oppvarmingen ikke lenger noen betydning, for da har stjernen hatt rikelig tid til å avkjøles, dersom det ikke finnes andre mekanismer som opprettholder en høy temperatur i sentrum.
De vesentlige grunnene til at temperaturen er høyest innerst, er for det første at fusjonsprosessene varmer opp gassen, og for det andre at materien innerst er godt isolert mot avkjøling, fordi det er så mye masse utenfor. Likevel finnes det en mekanisme for direkte avkjøling av materien i sentrum, og det er at alle nøytrinoene fra kjernereaksjonene tar med seg energi ut av Sola.

2f) Alle grunnstoffer tyngre enn helium er produsert i stjerner, og noen grunnstoffer er sjeldnere enn andre fordi de er vanskeligere å produsere. De grunnstoffene som det finnes mest av, utenom hydrogen, er de som produseres mest direkte i kjernereaksjoner i stjernene: helium (He), karbon (C), oksygen (O). Mesteparten av det heliumet som finnes, ble riktignok produsert da universet var bare et par minutter gammelt. Jernkjerner med massetall 56 er de mest stabile kjernene, dvs. de som har størst bindingsenergi (størst i absoluttverdi) pr. nukleon. Det koster derfor energi å produsere grunnstoffer tyngre enn jern, som f.eks. gull. De kan produseres i supernovaeksplosjoner, der den nødvendige energien er tilgjengelig i form av gravitasjonsenergi som frigjøres i selve eksplosjonen.

3a) Hvis $m_1 >> m_2$, er det mulig at den tyngste partikkelen kan ligge (tilnærmet) i ro, mens den andre beveger seg i en sirkelbane rundt, med konstant vinkelhastighet $\omega = 2\pi/P$, der P er perioden. For en sirkelbane er den store halvaksen a rett og slett radien. Kraften på partikkel 2 er da (i absoluttverdi)

$$K = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \ .$$

Hvis vi velger koordinatsystem med origo i posisjonen til den tunge partikkelen, og slik at bevegelsen foregår i (x, y)-planet, så har partikkel 2 posisjon

$$\boldsymbol{r} = a\cos(\omega t)\,\boldsymbol{i} + a\sin(\omega t)\,\boldsymbol{j} \ .$$

Hastigheten og akselerasjonen til denne partikkelen er da

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega a\sin(\omega t)\,\boldsymbol{i} + \omega a\cos(\omega t)\,\boldsymbol{j} \ , \\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 a\cos(\omega t)\,\boldsymbol{i} - \omega^2 a\sin(\omega t)\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{r} \ .
\end{aligned}$$

Absoluttverdiene av hastigheten og akselerasjonen er henholdsvis

$$v = |\dot{\boldsymbol{r}}| = \omega a \ , \qquad |\ddot{\boldsymbol{r}}| = \omega^2 a = \frac{v^2}{a} \ .$$

Kraft og akselerasjon har samme retning, nemlig fra partikkel 2 mot partikkel 1. Derfor er Newtons andre lov, $\boldsymbol{K} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$, oppfylt som en vektorligning så sant absoluttverdien av kraften, $K = |\boldsymbol{K}| = Gm_1m_2/a^2$, er lik massen m_2 ganger absoluttverdien av akselerasjonen:

$$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = m_2\omega^2 a = \frac{m_2v^2}{a} \ .$$

Det er fullt tillatt til eksamen å skrive opp den siste ligningen, med ett av de to uttrykkene for akselerasjonen, uten noen utledning! Her setter vi inn $\omega = 2\pi/P$, og dermed har vi spesialtilfellet av Keplers tredje lov,

$$P^2 = \frac{4\pi^2a^3}{Gm_1} \ .$$

Kommentar: Oppgaven var nok dessverre formulert slik at mange har misforstått den. Meningen var at den siste formelen skulle utledes fra Newtons andre lov og gravitasjonsloven, og ikke bare fra den generelle formen av Keplers tredje lov.

3b) Den minste mulige perioden for en planet er når den beveger seg like over soloverflaten. Perioden er da, sammenlignet med perioden til Jorda, i følge Keplers tredje lov,

$$\frac{P_{\mathrm{min}}}{1 \text{ år}} = \sqrt{\frac{R_\odot^3}{(1 \text{ AU})^3}} = \left(\frac{7{,}0\times10^5 \text{ km}}{1{,}50\times10^8 \text{ km}}\right)^{\frac{3}{2}} = 3{,}19\times10^{-4} \ .$$

Vi neglisjerer massen til Jorda og til den hypotetiske planeten sammenlignet med solmassen. Altså:

$$P_{\text{min}} = 3{,}19 \times 10^{-4}\ \text{år} = 3{,}19 \times 10^{-4} \times 365{,}25 \times 24\ \text{h} = 2{,}79\ \text{h}\ .$$

Sola kunne ikke ha en kortere rotasjonsperiode enn dette, for ellers ville de ytterste lagene rundt ekvator få så stor hastighet at gravitasjonskraften fra Sola ikke kunne holde dem på plass. To kommentarer: 1) Vi ser bort fra slike effekter som at Sola blir mer flattrykt jo raskere den roterer, eller at en planet innenfor Roche-grensen på ca. 2,5 solradier ikke kan holdes sammen av sin egen gravitasjon. 2) En rotasjonsperiode på 2,8 timer tilsvarer at gravitasjonskraften er akkurat sterk nok til å holde en partikkel i solatmosfæren i en sirkelbane like over overflaten. Hastigheten i en slik sirkelbane er $\sqrt{2}$ ganger mindre enn unnslipningshastigheten, som er den minste hastigheten partikkelen måtte ha for å forlate solsystemet.

3c) Dette er samme utregning som under punkt 3b), og siden Sirius B tilfeldigvis har samme masse som Sola, må vi bare erstatte solradien med radien til Sirius B. Vi får:

$$\frac{P_{\text{min}}}{1\ \text{år}} = \left(\frac{5200\ \text{km}}{1{,}50 \times 10^8\ \text{km}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2{,}04 \times 10^{-7}\ .$$

Altså:

$$P_{\text{min}} = 2{,}04 \times 10^{-7}\ \text{år} = 2{,}04 \times 10^{-7} \times 365{,}25 \times 24\ \text{h} = 1{,}79 \times 10^{-3}\ \text{h} = 6{,}44\ \text{s}\ .$$

Siden Sirius B er en typisk hvit dverg, og siden mange pulsarer (de fleste?) har vesentlig kortere perioder enn dette, kan ikke mekanismen for pulsarer i alminnelighet ha noe å gjøre med roterende hvite dverger. Kommentar: Noen eksamenskandidater hevder at det er observert pulsarer med perioder på mindre enn ett millisekund, men det er vel ikke riktig.

3d) Vi bruker igjen Keplers tredje lov. Store halvakse for ellipsebanen til romskipet er

$$a = \frac{150 \times 10^6\ \text{km} + 206 \times 10^6\ \text{km}}{2} = 1{,}78 \times 10^8\ \text{km}\ .$$

Hvis P er peioden for romskipets bane rundt Sola, så er

$$\frac{P}{1\ \text{år}} = \left(\frac{1{,}78 \times 10^8\ \text{km}}{1{,}50 \times 10^8\ \text{km}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1{,}293\ .$$

Tiden fra jordbanen til marsbanen er halvparten av perioden,

$$\frac{P}{2} = 0{,}646\ \text{år} = 0{,}646 \times 365{,}25\ \text{d} = 236{,}1\ \text{d}\ .$$

Et halvt år er 182,62 dager. Altså ville romskipet komme $236{,}1 - 182{,}62 = 53{,}5$ dager for sent til stevnemøtet med Mars.

Når vi antar at Jorda og Mars begge går i sirkelbaner, kan vi angi deres posisjoner ved hjelp av to vinkelvariable, som vi kaller φ_J og φ_M. Vi vet at Mars er i opposisjon 28. august, dvs. at den dagen er $\varphi_J = \varphi_M$, og hvis vi velger dette som nullpunkt, har vi at $\varphi_J = \varphi_M = 0$ den 28. august. Vi regner tiden, t, slik at $t = 0$ den 28. august, og vi har da at $\varphi_J = \omega_J\, t$ og $\varphi_M = \omega_M\, t$, der ω_J og ω_M er konstante vinkelhastigheter, $\omega_J = 2\pi/365$ d og $\omega_M = 2\pi/588$ d. Ett Mars-år regner vi er $P_M = 588$ dager, det er det vi finner av Keplers tredje lov,

$$\frac{P_M}{1 \text{ år}} = \left(\frac{206}{150}\right)^{\frac{3}{2}} = 1{,}609 \; .$$

(Mars-året er strengt tatt lenger, 687 dager, idet Mars-banen er elliptisk og ikke sirkelformet). Vi må sende i vei romskipet ved et tidspunkt t_0 som er slik at

$$\omega_J\, t_0 + \pi = \omega_M\, (t_0 + 236 \text{ d}) \; .$$

Uttrykket på venstre side av likhetstegnet er posisjonen til romskipet idet det når ut til Mars-banen, 236 dager etter oppskytingen. Uttrykket på høyre side av likhetstegnet er posisjonen til Mars 236 dager etter oppskytingen. Vi finner av denne ligningen at

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\omega_M\, 236 \text{ d} - \pi}{\omega_J - \omega_M} = \frac{\frac{2\pi\, 236 \text{ d}}{588 \text{ d}} - \pi}{\frac{2\pi}{365 \text{ d}} - \frac{2\pi}{588 \text{ d}}} = \frac{\frac{236}{294} - 1}{\frac{2}{365} - \frac{1}{294}} \text{ d} \\ &= \frac{365\,(236 - 294)}{588 - 365} \text{ d} = -\frac{365 \times 58}{233} \text{ d} = -91 \text{ d} \; . \end{aligned}$$

91 dager før 28. august skulle bli 29. mai. Altså tre måneder *etter* 28. februar, kanskje et overraskende svar?
Regner vi at vinkelhastigheten til Mars er $\omega_M = 2\pi/687$ d, istedet for $\omega_M = 2\pi/588$ d, fordi Mars-året i virkeligheten er 687 dager, får vi svaret -122 dager i stedet for -91. Men dette regnestykket ville være alvorlig feil, fordi vinkelhastigheten til Mars i perihel faktisk er større enn den vinkelhasigheten $\omega_M = 2\pi/588$ d som Mars ville ha dersom banen var sirkelformet.
Fasiten på denne regneoppgaven har ESA og NASA, Europas og USAs romfartsorganisasjoner. ESA sendte av gårde sin sonde til Mars den 2. juni (dagen før eksamen), mens NASA sendte av gårde en den 10. juni, og planlegger en oppskyting til et par uker senere. Det finnes naturlig nok noe slingringsmonn for valg av tidspunkt.
Idet romskipet møter Mars, har det mindre hastighet enn Mars, det har nemlig for liten hastighet til å fortsette i samme bane som Mars.

4a) z kalles rødforskyving fordi når $z > 0$, betyr det at synlig lys forskyves mot den røde enden av spektret. Når $z < 0$, betyr det at synlig lys forskyves mot den blå enden av spektret, og det kalles like naturlig for blåforskyving.

4b) Gravitasjonsfeltet fra Jorda gir følgende bidrag til gravitasjonspotensialet på jordoverflaten:

$$\begin{aligned} \phi_{JJ} &= -\frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{6{,}673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 6{,}0 \times 10^{24} \text{ kg}}{6{,}4 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= -6{,}26 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2 = -6{,}96 \times 10^{-10}\, c^2 \; . \end{aligned}$$

Gravitasjonsfeltet fra Sola gir følgende bidrag:

$$\begin{aligned} \phi_{JS} &= -\frac{GM_\odot}{1 \text{ AU}} = -\frac{6{,}673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 2{,}0 \times 10^{30} \text{ kg}}{1{,}50 \times 10^{11} \text{ m}} \\ &= -8{,}90 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2 = -9{,}90 \times 10^{-9}\, c^2 \; . \end{aligned}$$

Bidraget fra Sola er faktisk mer enn ti ganger større i absoluttverdi. Summen av de to bidragene gir det totale gravitasjonspotensialet på jordoverflaten:

$$\phi_J = \phi_{JJ} + \phi_{JS} = -9{,}53 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2 = -10{,}60 \times 10^{-9}\ c^2 \ .$$

Kommentar: Gravitasjonskraften er en vektor, den har både størrelse og retning. Men gravitasjonspotensialet er en skalar, det har ikke noen retning. To separate bidrag til gravitasjonspotensialet adderes derfor rett fram.

4c) For å finne gravitasjonsrødforskyvingen i lyset fra Sirius B må vi beregne gravitasjonspotensialet på overflaten av Sirius B:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -\frac{GM_B}{R_B} = -\frac{6{,}673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 2{,}0 \times 10^{30} \text{ kg}}{5{,}2 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= -2{,}57 \times 10^{13} \text{ m}^2/\text{s}^2 = -2{,}86 \times 10^{-4}\ c^2 \ . \end{aligned}$$

Gravitasjonspotensialet på jordoverflaten er 30 000 ganger mindre (i absoluttverdi), og følgelig neglisjerbart i denne sammenhengen. Gravitasjonsrødforskyvingen som det spørres etter, er $z = 2{,}86 \times 10^{-4}$.

4d) Banehastigheten til Jorda i omløp om Sola er

$$v_J = \frac{2\pi \ 1 \text{ AU}}{1 \text{ år}} = \frac{2\pi \ 1{,}50 \times 10^{11} \text{ m}}{365{,}25 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 2{,}99 \times 10^4 \text{ m/s} = 1{,}00 \times 10^{-4}\ c \ .$$

Avhengig av om Jorda beveger seg mot Sirius eller fra Sirius, gir Doppler-effekten et bidrag til rødforskyvingen som er enten minus eller pluss 10^{-4}. Altså $\mp 1/3$ av gravitasjonsrødforskyvingen i lyset fra Sirius B. I september observerer vi en gravitasjonsrødforskyving på $1{,}86 \times 10^{-4}$, mens vi observerer $3{,}86 \times 10^{-4}$ i mars, mer enn det dobbelte.

4e) Begge formlene, for Doppler-effekten og for gravitasjonsrødforskyvingen, er av formen

$$z = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+y}} - 1 \ .$$

For Doppler-effekten gjelder at $x = -y = v/c$, og for gravitasjonsrødforskyvingen gjelder at $x = 2\phi_1/c^2$ og $y = 2\phi_0/c^2$. De tilnærmingene som trengs, er at

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{1+y}} \approx 1 - \frac{y}{2} \ ,$$

og at

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{2}\right) \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \ .$$

Disse tilnærmingene gjelder så lenge $|x|$ og $|y|$ begge er mye mindre enn 1.
For å bevise de to første tilnærmingene, kan vi bruke binomialformelen:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}\, x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\, x^3 + \cdots \ .$$

Vi har bruk for spesialtilfellene $p = 1/2$ og $p = -1/2$. Når vi gjør tilnærmingen

$$(1+x)^p \approx 1 + px \ ,$$

for $|x| < 1$, så er feilen omtrent lik det første leddet som utelates, altså av størrelsesorden $p(p-1)x^2/2 \approx x^2$.

4f) Vi tar for oss en galakse i avstanden d, som beveger seg bort fra oss med hastigheten $v = H_0 d$, i følge Hubbles lov. Hvis vi antar at den alltid har beveget seg bort fra oss med hastigheten v, må vi konkludere med at den har beveget seg avstanden $d/2$ i løpet av tiden

$$\begin{aligned} t &= \frac{d/2}{v} = \frac{d}{2H_0 d} = \frac{1}{2H_0} = \frac{1}{140\ \text{km}/(\text{s megaparsec})} = \frac{3{,}26 \times 10^6\ \text{s lysår}}{140\ \text{km}} \\ &= \frac{3{,}26 \times 10^6\ \text{s} \times 1\ \text{år} \times 3{,}00 \times 10^5\ \text{km/s}}{140\ \text{km}} = 6{,}99 \times 10^9\ \text{år} \ . \end{aligned}$$

Svaret er uavhengig av avstanden d. Universet var altså halvparten så stort som nå for 7 milliarder år siden. Det er en halv gang til så mye som alderen til solsystemet.

4g) Ut fra den forklaringen på den kosmiske rødforskyvingen at bølgelengden strekkes like mye som universet utvider seg, så var bølgelengdene halvparten så store den gang universet var halvparten så stort som nå. I følge Wiens lov var da temperaturen i den kosmiske bakgrunnstrålingen dobbelt så høy som nå, dvs. 5,46 K.