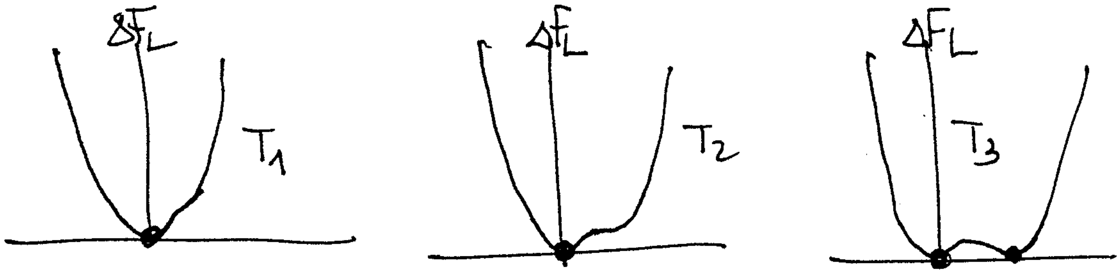
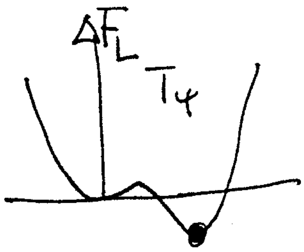
Eksamen Fag 74941 Faseoverg. & krit. fen., 06.06.95. Løsningsforslag

Oppgave I

a $\quad \Delta F_L = \frac{r}{2}\psi^2 - \frac{c}{3!}\psi^3 + \frac{u}{4!}\psi^4$

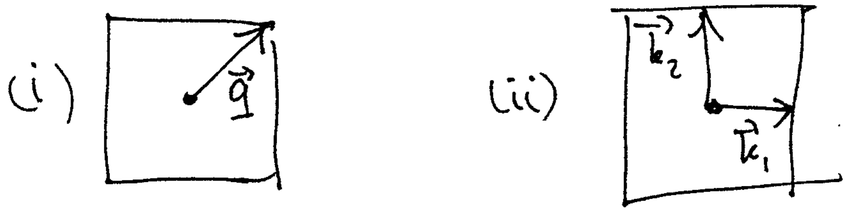




$T_1 > T_2 > T_3 > T_4$

Første ordens faseovergang ved $T = T_3$

b $\quad$ 1. Brillouin sone, kvadratisk gitter



De to mulige stjernene for kontinuerlig faseovergang

Høysymmetripunktene på randa av BZ gir ekstremalpunkter* for alle T

* I alle funksjoner over BZ, f.eks. ΔF_L.

c Translasjonsinvarians: $T_{\vec{R}} \Delta F_L = \Delta F_L$

$\uparrow$ vektor i direkte gitter

(i) $T_{\vec{R}} \rho_{\vec{q}}^{\ell} = \left(e^{-i\vec{q}\cdot\vec{R}} \rho_{\vec{q}}\right)^{\ell}$

$= (-1)^{m\ell}(-1)^{n\ell} \rho_{\vec{q}}^{\ell} = \rho_{\vec{q}}^{\ell} \Rightarrow \ell$ like tall

$\Delta F = \frac{r}{2}\underbrace{\rho_q^2}_{=\rho_{-q}\rho_q} + \frac{u}{4!}\rho_q^4 + \dots$ $\boxed{\text{Ising}}$.

(ii) $\cancel{T_{\vec{R}}\, \vec{k}^{\ell}}$ $T_{\vec{R}} \rho_{\vec{k}_1}^{\ell} = \left(e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{R}} \rho_{\vec{k}_1}\right)^{\ell} = (-1)^{m\ell} \rho_{\vec{k}_1}^{\ell}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell \text{ like}}$

$T_{\vec{R}} \rho_{\vec{k}_2}^{p} = (-1)^{mp} \rho_{\vec{k}_2}^{p}$

$\Rightarrow$ $\boxed{p \text{ like}}$ $\qquad \rho_{k_1} = \psi_1$

Rotasjon over $90°$: $k_1 \rightleftarrows k_2$ $\qquad \rho_{k_2} = \psi_2$

$\Delta F = \frac{r}{2}(\psi_1^2 + \psi_2^2) + \frac{u}{4!}(\psi_1^2 + \psi_2^2)^2 + \frac{v}{4!}(\psi_1^4 + \psi_2^4)$

$\boxed{\text{XY med kubisk anisotropi}}$

Oppgave II

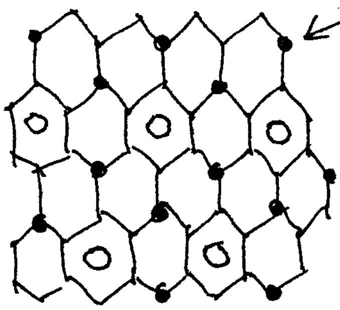
a A: Frastøting som "forbyr" nærmeste nabo, men er tilstrekkelig kortrekkende til å tillate nest nærmeste nabo okkupasjon

B: Frastøting av noe lenger rekkevidde: Nærmeste og 2. nabo forbudt, 3 nabo tillatt.

b A: To ekvivalente undergitre : $\boxed{\text{Ising Utekske}}$

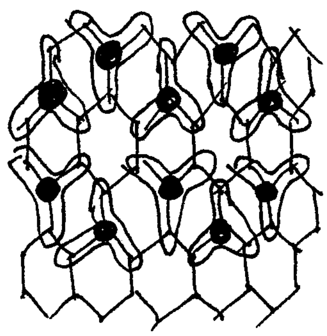
B: 4 ekvivalente undergitre : $\boxed{\text{4 tilst. Potts}}$

Hvorfor 4 ?



Dette valget er karakterisert ved "gitteret" av O-er. O-ene danner et skjeeft 2×2 gitter, med 4 ekvivalente uavhengige muligheter. qed.

c



• danner åpenbart et bikubegitter, ~~som~~ det underliggende d

$\uparrow \overset{\uparrow}{\upuparrows\!\downarrow} \uparrow$: $e^{3K}+e^{-3K} \equiv x^{3}+x^{-3}$

$\uparrow \overset{\uparrow}{\upuparrows\!\downarrow} \downarrow$: $e^{K}+e^{-K} \equiv x+x^{-1}$

$$\langle S_a\rangle_{s'} = s'\,\frac{x^{3}+x^{-3}+2(x+x^{-1})-(x+x^{-1})}{x^{3}+x^{-3}+3(x+x^{-1})} \equiv s'\psi(x)$$

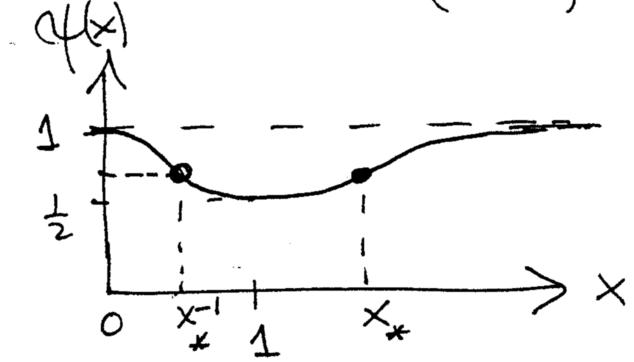
$$x^{3}+x^{-3}+3x+3x^{-1} = (x+x^{-1})^{3}$$

$$(x^{3}+x^{-3}+x+x^{-1}) : (x+x^{-1}) = x^{2}+x^{-2}$$

$$\begin{array}{l} x^{3}+x \\ \hline x^{-3}+x^{-1} \\ x^{-3}+x^{-1} \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$: $\psi(x) = \dfrac{x^{2}+x^{-2}}{(x+x^{-1})^{2}}$ $\xrightarrow{x\to\infty} 1$, $\xrightarrow{x\to 0} 1$

$\psi(1)=\frac{1}{2}$



$\boxed{K s_1 s_2 \to 2K\psi^{2} s_1' s_2' \qquad K' = 2K\psi^{2}}$

Fikspkt: $K_* = 2K_*\psi^{2}(x_*) \Rightarrow \psi(x_*) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

x_* og $\frac{1}{x_*}$ begge fikspunkt

$\boxed{\text{Ising}}$

$\Rightarrow$ K_* og $-K_*$ ferro & antiferrom. fikspunkt

4-tilstands Potts overgangen fanges ikke av denne RG!