UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 3652

Eksamen i fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Lørdag 19. desember 1992
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*

Oppgave 1:

a) Hva menes med (i) et ordinært punkt, (ii) et regulært singulært punkt, og (iii) et irregulært singulært punkt for en differensialligning? Hva menes med *rangen* til en singularitet?

b) Gi eksempel på en annen ordens differensialligning med (i) nøyaktig ett regulært singulært punkt på tallkula, og (ii) nøyaktig to regulære singulære punkter på tallkula.

c) Klassifiser differensialligningen

$$y''(x) + a\,y'(x) - \mathrm{e}^{x}\,y(x) = 0 \tag{1}$$

med hensyn på singulariteter, og deres art og rang. Her er a en konstant.

d) Finn de mulige asymptotiske oppførsler for ligningen (1) når (i) $x \to +\infty$ og (ii) $x \to -\infty$ (for reelle x).

e) Transformer ligningen (1) til "enklest mulig form", dvs. slik at summen av rangen til alle de singulære punktene blir så liten som mulig.

Oppgave 2:

Se på integralet

$$I(z,a) = \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-zt} \left(\frac{t}{1+t}\right)^a, \tag{2}$$

der z og a antas å være reelle og positive.

a) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $z \to +\infty$ med fast a.

b) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $a \to +\infty$ med fast z.

c) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $z \to 0^+$ med fast a.

Finn også den neste korreksjonen til denne oppførselen.

d) Hva menes det med at en funksjon f har en asymptotisk potensrekke,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n, \tag{3}$$

om $x = 0$?

Forklar hva som menes med optimal trunkeringsregel.

e) Finn den fullstendige asymptotiske utviklingen for $I(z,2)$ når $z \to \infty$.

For en gitt (stor) z, hvor mange ledd lønner det seg å ta med i denne rekken?

Oppgave 3:

a) Forklar kort hva grensesjikt-metoden går ut på. Forklar hva som menes med ytre og indre variable, og ytre og indre løsninger.

b) Se på randverdi problemet definert ved differensialligningen

$$\varepsilon\, y''(x) - x^3\, y'(x) - y(x) = 0, \tag{4}$$

og grensebetingelsene

$$y(1) = y(-1) = 1, \tag{5}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

Bestem hvor det må være grensesjikt, og hvordan den tilhørende tykkelsen skalerer med ε.

c) Finn (i) indre, (ii) ytre, og (iii) uniform løsning på randverdiproblemet i forrige punkt.

d) Vi forandrer nå ligning (4) til

$$\varepsilon\, y''(x) + x^3\, y'(x) - y(x) = 0, \tag{6}$$

med de samme grensebetingelsene som før.

Bestem igjen hvor det må være grensesjikt, og hvordan den tilhørende tykkelsen skalerer med ε.

e) Finn (i) indre, (ii) ytre, og (iii) uniform løsning på randverdiproblemet i forrige punkt.

Oppgave 4:

a) Forklar kort hva WKB-tilnærmingen går ut på. Gi eksempler på noen problemstillinger der den kan anvendes. (Du trenger ikke å løse disse problemene.)

b) Se så på startverdiproblemet

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + 2\frac{d}{dt}f(t) = \mathrm{e}^{\varepsilon t}\, f(t), \tag{7}$$

$$f(0) = 1, \qquad \frac{df}{dt}(0) = 0. \tag{8}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

Vis at du ved en passende skalering av de uavhengige variable kan transformere (7) over på "WKB-form", og gjør dette.

c) Se først bort fra startbetingelsene for f. Bruk WKB-metoden til å finne to uavhengige (tilnærmede) løsninger til (7). Regn, som vanlig, til ledende orden i ε.

NB! Det er ikke nødvendig, og heller ikke hensiktsmessig, å eksplisitt utføre de integralene som inngår i løsningen.

d) Finn så startverdiene (dvs. verdien av funksjonen og dens første deriverte i $t = 0$) for de løsningene som du fant i forrige punkt, igjen til ledende orden i ε.

e) Bruk resultatet fra foregående punkt til å finne ledende ordens løsning til startverdiproblemet (7-8).

Finn oppførselen til denne løsningen når $t \to \infty$.